$\boxed{\text{Schéma de Bernoulli. Loi binomiale}}$

(Rappels de première S)

$\boxed{1}$ Épreuve de Bernoulli.

On s'intéresse ici aux expériences aléatoires à deux issues (S : « succès » ; $\overline{S}$: « échec »).
On note souvent $p = p(S)$ et $q = p(\overline{S}) = 1 - p$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes ; S = « la carte est un coeur » et $\overline{S}$ = « la carte n'est pas un coeur » . On a $p = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{3}{4}$.

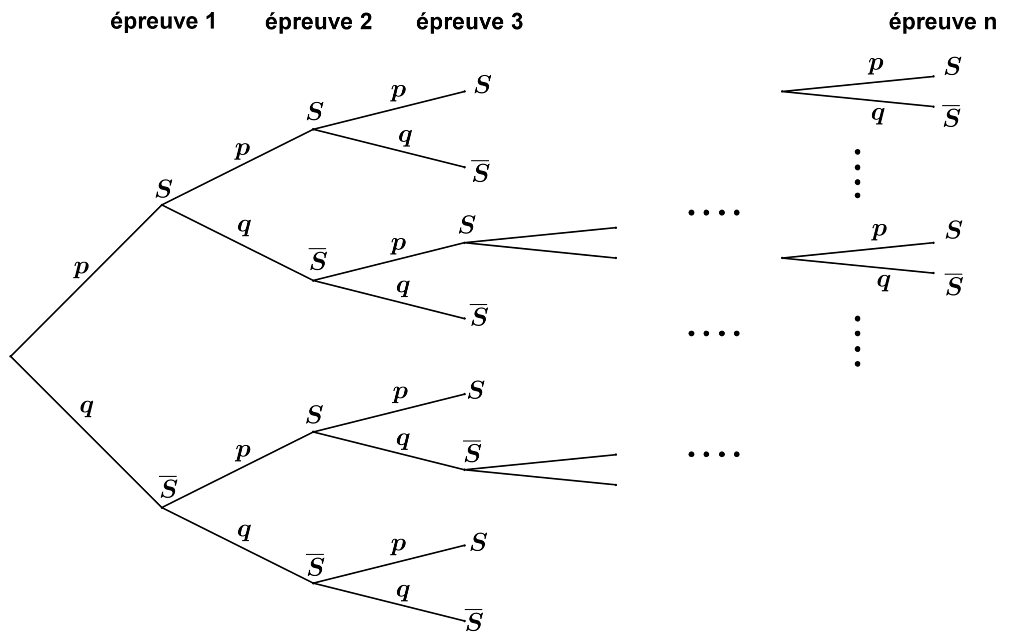
Définition : Lorsqu'on répète n fois une épreuve de Bernoulli identique de façon à ce que le résultat à une épreuve n'influence pas les autres résultats (on parle d'*épreuves indépendantes*), on effectue un *schéma de Bernoulli.*

Exemple : Tirer une carte dans un jeu de 32 cartes, 20 fois de suite, en regardant à chaque fois s'il s'agit d'un coeur (avec remise de la carte tirée dans le jeu à chaque fois pour que les épreuves soient indépendantes).

$\boxed{2}$ Loi binomiale.

a. Arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli.

On considère le schéma de Bernoulli obtenu en répétant n fois une épreuve élémentaire de succès S. On note $p = p(S)$ et $q = p(\overline{S}) = 1 - p$. L'arbre pondéré modélisant la situation est le suivant :



Notation : Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de chemins dans l'arbre précédent qui contiennent exactement k fois la lettre « S » (et donc $n-k$ fois le symbole $\overline{S}$) est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n » .

Propriété (dite « du triangle de Pascal ») :
Si k et n sont deux entiers tels que $0 \leqslant k < n$, on a : $\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}}$.

$\hookrightarrow$ Cela permet de construire le tableau suivant (appelé « triangle de Pascal ») dans lequel le coefficient $\binom{n}{k}$ figure à l'intersection de la ligne numéro n et de la colonne numéro k :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

b. Loi binomiale.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit que la variable aléatoire X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p (notée parfois $\mathscr{B}(n;p)$) lorsque pour tout entier k entre 0 et n :

$$\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}} \qquad \text{avec } q = 1-p$$

Théorème : Soit une épreuve de Bernoulli avec $p = p(S)$ (et $q = p(\overline{S}) = 1-p$) répétée n fois de façon indépendante et X le nombre de succès (nombre de fois où on obtient S). Alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Preuve : L'arbre de la partie 2.a. permet de modéliser la situation. Si k est un entier entre 0 et n, les chemins favorables à l'événement $(X=k)$ sont ceux qui contiennent k fois la lettre S (et donc $n-k$ fois le symbole $\overline{S}$). Ils sont au nombre de $\binom{n}{k}$ et chaque résultat associé à un tel chemin a une probabilité égale à $p^k q^{n-k}$ (produit des probabilités inscrites sur chacune des branches constituant le chemin). On a donc $p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}$, ce qui prouve bien que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Propriétés (Espérance et variance) : Si la variable X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, alors : $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

Exercices d'application (résolus).

1) On lance 100 fois de suite un dé équilibré à 6 faces.
– Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 10 fois la face 6 ?
– Quelle est la probabilité d'obtenir au minimum 3 fois la face 6 ?

2) Un Q.C.M. comporte 20 questions (5 réponses possibles par question et une seule réponse est exacte).
• Si l'on répond au hasard à chacune des 20 questions du Q.C.M. , quelle est la probabilité de répondre correctement :
– à exactement 15 questions ?
– à au moins 18 questions ?
• Toujours en répondant au hasard au Q.C.M., quel nombre de bonnes réponses peut-on espérer obtenir en moyenne ?

$\hookrightarrow$ **Solutions :**

1) On peut modéliser l'expérience aléatoire par un schéma de Bernoulli obtenu en répétant 100 fois et de manière indépendante, l'épreuve élémentaire : lancer une fois le dé, avec pour succès $S =$ « on obtient 6 » et $p = p(S) = \frac{1}{6}$. Si on note X le nombre de succès (c'est-à-dire ici le nombre de fois où le 6 est apparu), alors on sait que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(100; \frac{1}{6}\right)$.
D'où : $p(X = 10) = \binom{100}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{90} \approx 0,0214$ (voir rappel* concernant l'utilisation de la calculatrice pour calculer les coefficients binomiaux).
D'autre part : $p(X \geqslant 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)]$
$= 1 - \binom{100}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{100} - \binom{100}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{99} - \binom{100}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{98} \approx 0,999997.$

2) On peut modéliser l'expérience aléatoire par un schéma de Bernoulli obtenu en répétant 20 fois et de manière indépendante, l'épreuve élémentaire : répondre (de façon aléatoire) à une question du Q.C.M., avec pour succès $S =$ « la réponse est correcte » et $p = p(S) = \frac{1}{5} = 0,2$. Si on note X le nombre de succès (c'est-à-dire ici le nombre de réponses correctes), alors on sait que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20; 0,2)$. D'où :
$p(X = 15) = \binom{20}{15} \times (0,2)^{15} \times (0,8)^{5} \approx 1,7 \times 10^{-7}$ et $p(X \geqslant 18) = \displaystyle\sum_{k=18}^{20} \binom{20}{k} \times (0,2)^{k} \times (0,8)^{20-k}$
$= \binom{20}{18} \times (0,2)^{18} \times (0,8)^{2} + \binom{20}{19} \times (0,2)^{19} \times (0,8)^{1} + \binom{20}{20} \times (0,2)^{20} \times (0,8)^{0} \approx 3,3 \times 10^{-11}.$

D'autre part, on a $\mathrm{E}(X) = 20 \times 0,2 = 4$. Cela signifie qu'en moyenne, en répondant au hasard au Q.C.M., on peut espérer obtenir seulement 4 bonnes réponses.

(*) • Sur une calculatrice TI, pour calculer par exemple $\binom{100}{10}$: taper « 100 », appuyer sur la touche $\boxed{\textbf{MATH}}$, choisir le menu **PRB**, sélectionner **Combinaison**, taper « 10 », valider.

• Lorsque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; p)$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on peut calculer $p(X = k)$ sur TI avec **binomFdp(n,p,k)** et $p(X \leqslant k)$ avec **binomFRép(n,p,k)** (auxquels on peut accéder via le menu « **distrib** »).