## EXERCICE 1

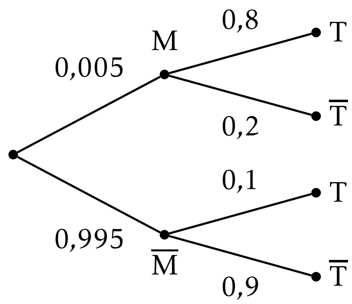
**1.** On considère qu'il y a équiprobabilité. La probabilité demandée est $p = \dfrac{5}{1\ 000} = \dfrac{0,5}{100} = 0,005$.

**2. a.** Il y a suffisamment d'animaux pour que l'on puisse considérer que les tirages successifs sont indépendants. On répète donc 1000 fois de façon indépendante l'épreuve de Bernoulli suivante : "on choisit au hasard un animal parmi 1000 et on regarde si il est malade (succès) ou non (échec)". La probabilité de succès est $p = 0,005$. La variable aléatoire comptant le nombre d'animaux malades suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,005$.

**b.** On a $E(X) = n \times p = 1000 \times 0,005 = 5$.

**c.** Soit A l'événement : aucun animal parmi les 1000 n'est malade.
On a $p(\text{A}) = p(X = 0) = \binom{1000}{0} \times 0,005^0 \times 0,995^{1000} = 0,995^{1000} \approx 0,0067$.
On a $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \simeq 1 - 0,9685 \simeq 0,0315$.
La probabilité que 10 animaux au moins parmi les 1000 soient malades est d'environ 0,0315.

**3. a.** On a l'arbre suivant :




**b.** M et $\overline{\text{M}}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$p(\text{T}) = p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{T}) + p(\overline{\text{M}}) \times p_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,004 + 0,099\ 5 = 0,103\ 5$.

**c.** $p_{\text{T}}(\text{M}) = \dfrac{p(T \cap \text{M})}{p(T)} = \dfrac{0,005 \times 0,8}{0,103\ 5} \approx 0,0386$.

## EXERCICE 2

On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

**1. a.** $u_1 = \dfrac{2+2}{2 \times 2 + 1} = \dfrac{4}{5} = 0,8$

$$u_2 = \frac{\frac{4}{5} + 2}{2 \times \frac{4}{5} + 1} = \frac{14}{13} \approx 1,08$$

$$u_3 = \frac{\frac{14}{13} + 2}{2 \times \frac{14}{13} + 1} = \frac{40}{41} \approx 0,98$$

$$u_4 = \frac{\frac{40}{41} + 2}{2 \times \frac{40}{41} + 1} = \frac{122}{121} \approx 1,01$$

**b.**

| $n$ | valeur approchée de $u_n - 1$ | signe de $u_n - 1$ | signe de $(-1)^n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $2 - 1 = 1$ | + | + |
| 1 | $0,8 - 1 = -0,2$ | − | − |
| 2 | $1,08 - 1 = 0,08$ | + | + |
| 3 | $0,98 - 1 = -0.02$ | − | − |
| 4 | $1,01 - 1 = 0,01$ | + | + |

Si $n$ est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

**d.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $P(n)$ la proposition : «$u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ ».
Initialisation : $u_0 - 1 = 1$ est positive donc a le même signe de $(-1)^0 = 1$ donc $P_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$
En effet, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1} = -\dfrac{u_n - 1}{2u_n + 1}$
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ donc $-(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.
De plus $u_n > 0$ donc $2u_n + 1 > 0$ donc $u_{n+1}$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.
Conclusion : La propriété $P_n$ est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, on a :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

**2.** **a.** Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{u_n + 2 + 2u_n + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{-1 + u_n}{3u_n + 3}$$

**b.** Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{-1 + u_n}{3u_n + 3} = \dfrac{-(u_n - 1)}{3(u_n + 1)} = -\dfrac{1}{3} v_n$.

Donc la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel $n$, $v_n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$ $(-1 < q < 1)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc par limite de somme et quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

## EXERCICE 3 (D'après Amérique du Sud - novembre 2016)

**Proposition 1 : VRAIE**

On note $B$ le point d'affixe 4 et $C$ le point d'affixe $-2\text{i}$.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points du plan d'affixe $z$ tels que $|z - 4| = |z + 2\text{i}|$
$M(z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow |z - 4| = |z + 2\text{i}| \Leftrightarrow BM = CM$.
Donc $\mathcal{F}$ est la médiatrice du segment $[BC]$ donc $\mathcal{F}$ est bien une droite.
Vérifions si $A$ appartient à $\mathcal{F}$ :
D'une part $|z_A - 4| = |-4 + 3\text{i}| = \sqrt{16 + 9} = 5$ et d'autre part, $|z_A + 2\text{i}| = |5\text{i}| = 5$ donc $|z_A - 4| = |z_A + 2\text{i}|$ donc $A$ appartient à $\mathcal{F}$.

**Proposition 2 : VRAIE**

$(z-1)(z^2-8z+25)=0 \quad (\star)$
$(\star) \Leftrightarrow z=1$ ou $z^2-8z+25=0$
$z^2-8z+15$ a pour discriminant $\Delta=-36$
$(\star) \Leftrightarrow z=1$ ou $z=4-3\mathrm{i}$ ou $z=4+3\mathrm{i}$
On note $A$, $B$ et $C$ les points d'affixe respectives $z_A=1$, $z_B=4-3i$ et $z_C=4+3i$.
$AB=|z_B-z_A|=|3-3\mathrm{i}|=3\sqrt{2}$
$AC=|z_C-z_A|=|3+3\mathrm{i}|=3\sqrt{2}$
$BC=|z_C-z_B|=|6\mathrm{i}|=6$
On a $BC^2=AB^2+AC^2$ donc $ABC$ est un triangle rectangle en $A$.

**Proposition 3 : FAUSSE**

On a $-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ donc $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8=2^8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}$
Or $\dfrac{20\pi}{3}=\dfrac{18\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}=6\pi+\dfrac{2\pi}{3}$ donc $\dfrac{20\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ donc un argument de $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.
Or $\dfrac{2\pi}{3}$ n'est pas congru à $\dfrac{\pi}{3}$ modulo $2\pi$.

**Proposition 4 : VRAIE**

Posons $z_c=1-4i$. On a alors $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1-4i-4}{3i-4}=\dfrac{3+4i}{4-3i}=\dfrac{(3+4i)(4+3i)}{16+9}=\dfrac{25i}{25}=i$.
On a donc $\dfrac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\dfrac{AC}{AB}=|i|=1$ d'où $AB=AC$.
D'autre part, on obtient, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=arg(i)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
Le point $C$ convient et par unicité du point ainsi obtenu, on en déduit que la proposition est vraie.

**Proposition 5 : VRAIE**

Pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}=(1+i)^4=(1+2i+i^2)^2=(2i)^2=-4$,
on en déduit que $(\overrightarrow{OM_{n+4}},\overrightarrow{OM_n})=arg(-4)=\pi[2\pi]$. Donc pour tout entier naturel $n$, les points $O$, $M_n$, $M_{n+4}$ sont alignés.

**<u>EXERCICE 4</u>** (D'après Nouvelle Calédonie - Novembre 2013)

1. **a.** $g$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables.
   $\forall x\in[0\ ;\ +\infty[$, $g'(x)=2x\,\mathrm{e}^x+x^2\,\mathrm{e}^x=\left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^x$
   $\forall x\in[0\ ;\ +\infty[$, $\left(x^2+2x\right)\geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x>0$ donc $g'(x)\geqslant 0$ ($g'(x)$ ne s'annule qu'en 0)
   $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc, par limite de produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
   $g(0)=-1$

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de $g'(x)$ | | $+$ | |
| variations de $g$ | $-1$ | $\nearrow\ 0\ \nearrow$ | $+\infty$ |

   **b.** Sur $[0\ ;\ +\infty[$, $g$ est continue (car dérivable) et strictement croissante à valeur sur $[-1\ ;\ +\infty[$.
   Or $0\in[-1\ ;\ +\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $a$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   $g(0{,}703)\approx-1{,}8\times10^{-3}$, $g(a)=0$ et $g(0{,}704)\approx 2{,}048\times10^{-3}$
   On a $g(0{,}703)<g(a)<g(0{,}704)$ donc, par stricte croissance de $g$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ , $0{,}703<a<0{,}704$.

   **c.** $g$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g(a)=0$ donc :

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2.** **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par limite de somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0\ ,\ x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0\ ,\ x>0} \mathrm{e}^x = 1$ donc, par limite de somme, $\lim\limits_{x\to 0\ ,\ x>0} f(x) = +\infty$.

**b.** $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

**c.** $\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[,\ x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ | $+\infty$ |

**d.** D'après le tableau de variation, le minimum de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $m = f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$.

Or $g(a) = 0 \Leftrightarrow a^2\,\mathrm{e}^a - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$

Donc le minimum de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

**e.** Soit $h$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$.

$h$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[,\ h'(x) = -\dfrac{x+2}{x^3}$.

$\forall x \in ]0\ ;\ +\infty[,\ h'(x) < 0$ donc $h$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$0{,}703 < a < 0{,}704$ donc, par stricte décroissance de la fonction $h$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, $h(0{,}704) < m < h(0{,}703)$.

Or $h(0{,}704) \approx 3{,}438$ et $h(0{,}703) \approx 3{,}445$ donc $3{,}43 < m < 3{,}45$.

**3.** **a.** **Algorithme**

| Étape | $c$ | $g(a)$ | $g(c)$ | $g(a)\times g(c) \geqslant 0$ ? | $a$ | $b$ | $b-a > 0{,}1$ ? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Initialisation | //////// | //////// | //////// | //////// | 0 | 1 | oui |
| Étape 1 | 0,5 | −1 | −0,59 | oui | 0,5 | 1 | oui |
| Étape 2 | 0,75 | −0,59 | 0,19 | non | 0,5 | 0,75 | oui |
| Étape 3 | 0,625 | −0,59 | −0,27 | oui | 0,625 | 0,75 | oui |
| Étape 4 | 0,6875 | −0,27 | −0,06 | oui | 0,6875 | 0,75 | non |

**b.** Cet algorithme affiche $a = 0{,}6875$ et $b = 0{,}75$ qui sont les bornes d'un encadrement de $a$ d'amplitude inférieure à 0,1