

Correction du BONUS du contrôle n°4

- **A)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \underbrace{f(x^{2017})}_{f[a(x)]} - \underbrace{x^{1008}}_{b(x)} \underbrace{f(x^{1009})}_{f[d(x)]}$.

Par composition, produit et somme, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$g'(x) = \underbrace{2017 x^{2016} f'(x^{2017})}_{a'(x) \times f'[a(x)]} - \underbrace{[1008 x^{1007} f(x^{1009})]_{b'(x)} + \underbrace{x^{1008}}_{b(x)} \times \underbrace{1009 x^{1008} f'(x^{1009})}_{d'(x) \times f'[d(x)]}}_{f[d(x)]}.$$

On obtient en particulier $g'(1) = 2017 f'(1) - 1008 f(1) - 1009 f'(1) = 0$ (car $f(1) = f'(1)$).

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^{2017}) - x^{1008} f(x^{1009})}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 0$.

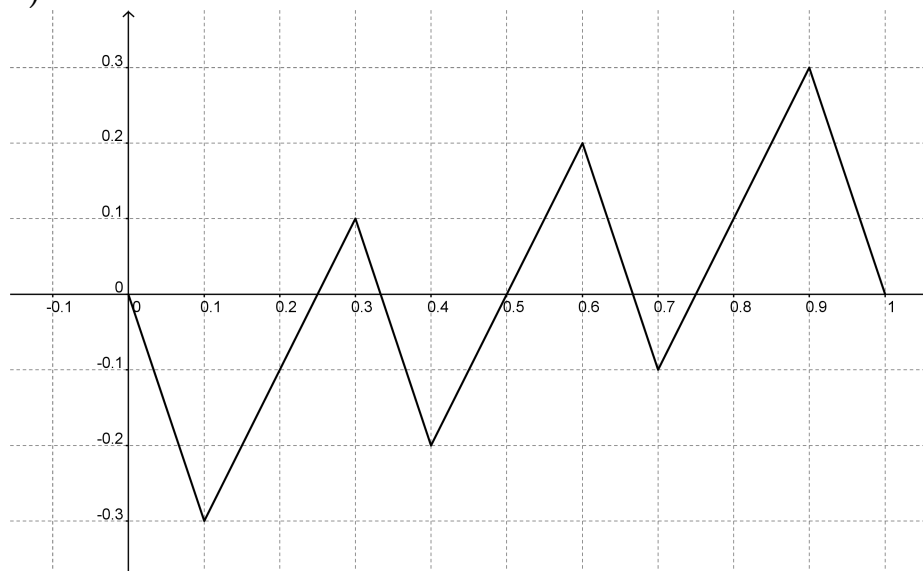
- **B)1)** Soit g la fonction définie sur $[0 ; 0,7]$ par $g(x) = f(x + 0,3) - f(x)$. Comme f est continue sur $[0 ; 1]$, la fonction g est continue sur $[0 ; 0,7]$ par composition et somme. Or, par hypothèse la fonction g ne s'annule pas $[0 ; 0,7]$; d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, cela entraîne que g garde un signe strict constant sur $[0 ; 0,7]$ (en effet, s'il existait a et b dans $[0 ; 0,7]$ tels que $g(a)g(b) \leq 0$, le T.V.I. garantirait l'existence d'un c entre a et b tel que $g(c) = 0$). On peut par exemple supposer que : $\forall x \in [0 ; 0,7], g(x) > 0$ (si on suppose $g < 0$ sur $[0 ; 0,7]$, le raisonnement est analogue).

On a alors : $\forall x \in [0 ; 0,7], f(x + 0,3) > f(x)$, ce qui implique en particulier :

$$f(0,1) < f(0,4) < f(0,7) < f(1) = 0 = f(0) < f(0,3) < f(0,6) < f(0,9) .$$

Le T.V.I. montre alors que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans chacun des intervalles suivants : $]0,1 ; 0,3[$, $]0,3 ; 0,4[$, $]0,4 ; 0,6[$, $]0,6 ; 0,7[$ et $]0,7 ; 0,9[$. Avec les solutions 0 et 1, cela en assure bien au moins 7.

2)



C) Soit f une fonction vérifiant (i) et (ii).

Fixons x dans $\mathbb{R}$.

Si $h \in \mathbb{R}$, d'après (i) on a $f(x+h) \leq f(x)+f(h)$ et $f(x) = f[x+h+(-h)] \leq f(x+h)+f(-h)$, donc $-f(-h) \leq f(x+h) - f(x) \leq f(h)$.

– Si $h > 0$, on obtient : $\frac{f(-h)}{-h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(h)}{h}$ (1). Or d'après (ii), $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} =$

1 et comme $\lim_{h \rightarrow 0} (-h) = 0$, on obtient également par composition $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)}{-h} = 1$. D'après le

Théorème des Gendarmes appliqué à (1), on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$ (2).

– Si $h < 0$, on obtient : $\frac{f(-h)}{-h} \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{f(h)}{h}$ et un raisonnement identique

prouve que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$ (3).

On déduit de (2) et (3) que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$, ce qui prouve que f est dérivable en x et que $f'(x) = 1$.

Finalement, comme le choix du réel x au départ est arbitraire, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$. Cela établit que f est forcément la fonction $x \mapsto x$ [réciproquement, celle-ci vérifie bien (i) et (ii)].