

Correction du contrôle de MATHÉMATIQUES n° 4

- (I) 1) Soient $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{x^3+1}{x+3}$; si $x < 0$, on a $v(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{1 + 3 \times \frac{1}{x}}$
 donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = +\infty$ (par produit, somme et quotient) ; d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
 donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} u[v(x)] = +\infty$, soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}} = +\infty$.
- 2)a) Pour tout $x > 0$, on a $\sqrt{9x^2+7} - 3x = \frac{(\sqrt{9x^2+7} - 3x)(\sqrt{9x^2+7} + 3x)}{\sqrt{9x^2+7} + 3x} = \frac{\sqrt{9x^2+7}^2 - (3x)^2}{\sqrt{9x^2+7} + 3x}$,
 d'où $\sqrt{9x^2+7} - 3x = \frac{9x^2+7-9x^2}{\sqrt{9x^2+7} + 3x} = \frac{7}{\sqrt{9x^2+7} + 3x}$. On a $\sqrt{9x^2+7} \geq 0$ donc $\sqrt{9x^2+7} + 3x \geq 3x$;
 or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$, d'où par comparaison : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+7} + 3x) = +\infty$ et finalement
 par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+7} - 3x) = 0$.
- 2)b) Si $x > 0$, on a $\sqrt{9x^2+x} - 3x = \frac{\sqrt{9x^2+x}^2 - (3x)^2}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} = \frac{9x^2+x-9x^2}{\sqrt{9x^2+x} + 3x} = \frac{x}{\sqrt{9x^2+x} + 3x}$,
 soit $\sqrt{9x^2+x} - 3x = \frac{x}{\sqrt{x^2(9+\frac{1}{x})} + 3x} \stackrel{\sqrt{x^2}=x \text{ car } x>0}{=} \frac{x}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}} + x} = \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}} + 3}$.
- Soient $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 9 + \frac{1}{x}$; on a par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 9$ et $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$
 (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$) donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9+\frac{1}{x}} = 3$, ce qui
 montre, par somme et quotient, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{9x^2+x} - 3x] = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$.
- 3) La fonction $f: x \mapsto (3x-2)^{10}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f': x \mapsto 10 \times 3 \times (3x-2)^9$;
 en particulier $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 10 \times 3 \times (3-2)^9 = 30$, c'est-à-dire :
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-2)^{10} - 1}{x - 1} = 30$ (noter que $f(1) = (3-2)^{10} = 1^{10} = 1$).

II 1) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$ n'est défini que lorsque $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire si $x \notin \{-1; 1\}$.
L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2) On a $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \frac{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$ (lorsque $x \neq 0$)

Par somme, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}) = 1 - 0 + 0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x^2}) = 1 - 0 = 1$.

De même : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}) = 1 - 0 + 0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x^2}) = 1 - 0 = 1$.

On déduit par quotient que $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1}$.

$\hookrightarrow$ La droite d'équation $y=1$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, d'où :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
x^2-1	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

- On a $\lim_{x \rightarrow -1} (x-2)^2 = (-1-2)^2 = 9$.

D'autre part (voir tableau de signes) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x^2 - 1) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x^2 - 1) = 0^-$

d'où par quotient, $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty}$

- On a $\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2 = (1-2)^2 = 1$.

D'autre part (voir tableau de signes) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 - 1) = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) = 0^+$

d'où par quotient, $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty}$

$\hookrightarrow$ Les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$ sont donc asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

3) Si $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = w(x)^2$, où $w(x) = x-2$ et $v(x) = x^2 - 1$. On a $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ et $u'(x) = 2w'(x)w(x) = 2 \times 1 \times (x-2)$
d'où $f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2-1) - (x-2)^2 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-2)[2(x^2-1) - 2x(x-2)]}{(x^2-1)^2}$,

soit $f'(x) = \frac{(x-2)(2x^2 - 2 - 2x^2 + 4x)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-2)(4x-2)}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2 - 10x + 4}{(x^2-1)^2}$

4) Si $x \in \mathcal{D}$, $(x^2-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)(4x-2)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$x-2$		-	o	+	
$4x-2$	-	o	+		
Produit	+	o	-	o	+

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$4x-2=0 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

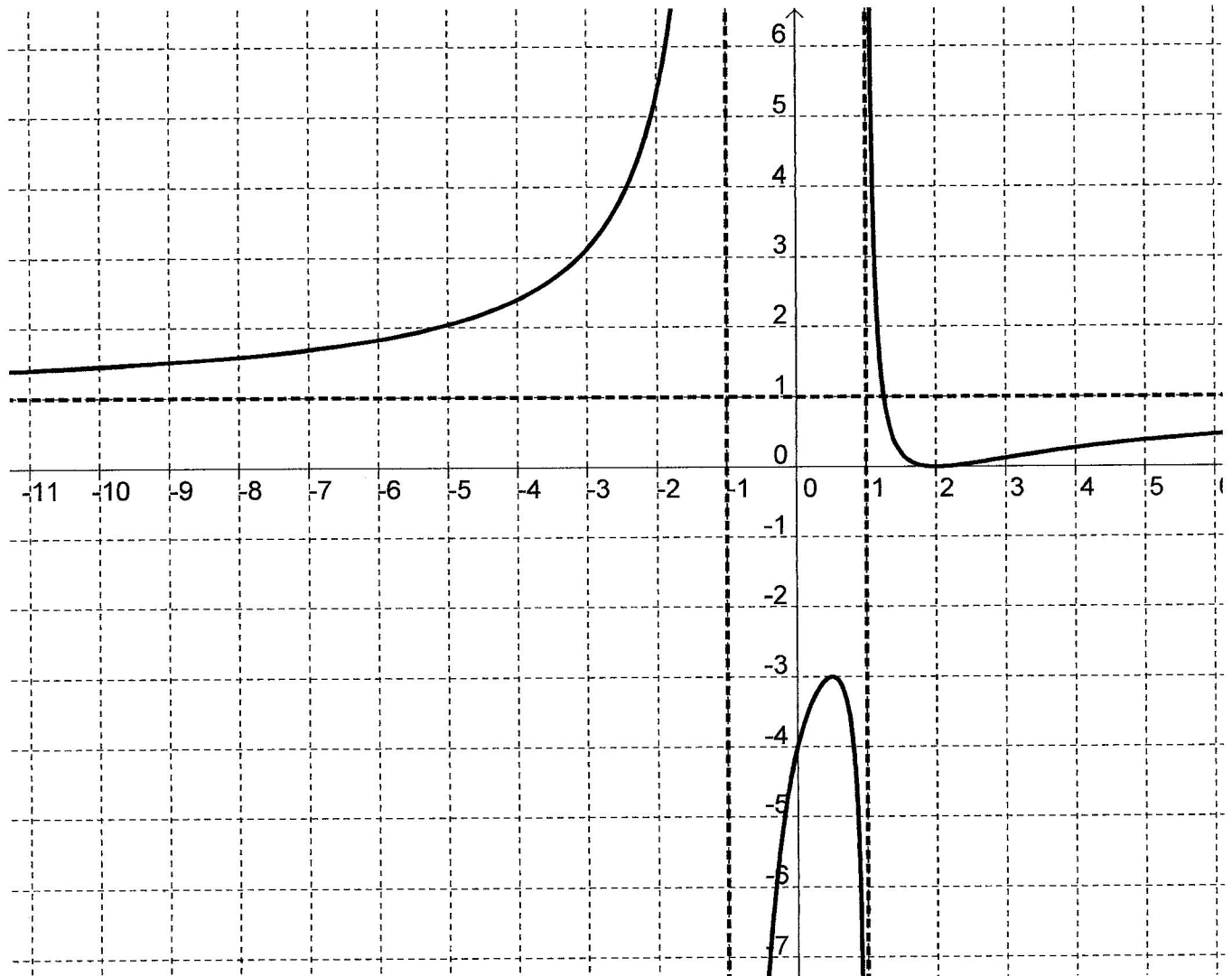
D'où l'on déduit finalement :

Détails : $f(2) = \frac{(2-2)^2}{2^2-1} = \frac{0}{3} = 0$

et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1} = \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}} = -3$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f	1	$\nearrow +\infty$	$\nearrow -3$ $\searrow -\infty$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$ $\searrow 0$	$\nearrow 1$

Voici, à titre de curiosité, l'allure du graphe de f :



(en pointillés gras, les asymptotes)

III 1)a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et pour tout réel x , $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. On en déduit :

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$-\infty$	-1	-5	0	$+\infty$

((détails : $h(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 3 = -1$ et $h(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 3 = -5$))

Si $x \neq 0$, on a $h(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, on obtient par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on déduit par produit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

1)b) • D'après son tableau des variations, la fonction h possède un maximum égal à -1 sur $] -\infty; 1]$. Par conséquent, pour tout $x \leq 1$, on a $h(x) \leq -1 < 0$, ce qui entraîne que l'équation $h(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $] -\infty; 1]$.

• La fonction h est continue (car dérivable, cf 1.a.) et strictement croissante sur $]1; +\infty[$; on a : $h(1) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, donc $0 \in \left] h(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[$ et d'après le corollaire du T.V.I., l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $]1; +\infty[$.

• Bilan : l'équation $h(x) = 0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.

La calculatrice fournit : $2,1 < \alpha < 2,11$.

1)c) On déduit du tableau des variations de h (complété, cf 1.a.) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
h	$-$	0	$+$

2)a) $x \xrightarrow{u} x^3 - 7x - 21$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et $x \xrightarrow{v} \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, par conséquent $f = uv$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée $f' = u'v + uv'$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (3x^2 - 7)\sqrt{x} + (x^3 - 7x - 21) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$, soit :

$$f'(x) = \frac{2(3x^2 - 7)\sqrt{x^2} + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(3x^2 - 7) + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} \text{ et finalement :}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 14x + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 - 21x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{7h(x)}{2\sqrt{x}}.$$

2)b) Comme $7 > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$ lorsque $x > 0$, on déduit que f' est du signe de h sur $]0; +\infty[$.
D'où, d'après 1.c. :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

((détail : $f(0) = (0^3 - 7 \times 0 - 21) \times \sqrt{0} = 0$))

Si $x \neq 0$, on a $x^3 - 7x - 21 = x^3 \left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on obtient par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 7x - 21) = +\infty$.
Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, d'où par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2)c) On a $h(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 - 3\alpha - 3 = 0$, soit $\alpha^3 = 3\alpha + 3$.

Or $f(\alpha) = (\alpha^3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$, donc $f(\alpha) = (3\alpha + 3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$, soit :

$$f(\alpha) = (-4\alpha - 18)\sqrt{\alpha} = -2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}.$$

D'après son tableau des variations (cf 2.b.), f possède donc bien un minimum égal à $-2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$ sur $[0; +\infty[$.