

Correction de la question II.2.b du polycopié « Exercices sur la continuité »

Si $x \in \mathbb{R}$, on a $(x^2 - x + 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $xg(x)$. Par conséquent :

x	$-\infty$	c	0	$+\infty$
x	$-$		0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
f	$-\infty$	$f(c)$	0	$+\infty$

(détail : $f(0) = \frac{0^3 + 3 \times 0^2}{0^2 - 0 + 1} = 0$)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - x + 1} = \frac{x^2(x+3)}{x^2 - x + 1} = \frac{x+3}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

• Par somme on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$ donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

• Par somme on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$ donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

→ À titre de curiosité, voici l'allure de la représentation graphique de f :

