

- (I) 1) $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x \in]-2; 1[$ (calculer Δ etc. détails laissés au lecteur) donc la fonction f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus]-2; 1[$. Comme f est une fonction rationnelle définie sur $\mathcal{D}$, elle est dérivable sur $\mathcal{D}$ et: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(4x-1)(x^2+x-2) - (2x+1)(2x-x+2)}{(x^2+x-2)^2}$,
soit $f'(x) = \frac{4x^3+4x^2-8x-x^2-x+2 - 4x^3+2x^2-4x-2x^2+x-2}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3x^2-12x}{(x^2+x-2)^2}$.
Si $x \in \mathcal{D}$, on a $(x^2+x-2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3x^2-12x = 3x(x-4)$, d'où:

x	$-\infty$	-2	0	1	4	$+\infty$
$3x$		-	o	+		+
$x-4$		-		-	o	+
$f'(x)$	+	+	o	-	-	+
f	$\nearrow +\infty$	$\nearrow -1$ $\searrow -\infty$		$\nearrow +\infty$ $\searrow \frac{5}{3}$		$\nearrow +\infty$

On a $f(0) = \frac{2}{-2} = -1$ et

$$f(4) = \frac{32-4+2}{16+4-2} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

- Si $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, on a $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x^2}}$. Or, par produit et somme, on a:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x^2}\right) = 2 - 0 + 2 \times 0 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x^2}\right) = 1 + 0 - 2 \times 0 = 1, \text{ donc par quotient.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2. \text{ Un raisonnement analogue prouve que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

- x^2+x-2 est un trinôme du second degré, donc il est du signe de $a=1$ sauf entre ses racines, d'où $\rightarrow$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x^2+x-2	+	o	-	+

- On a $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2-x+2) = 8+2+2=12 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+x-2) = 0$; plus précisément d'après le tableau*, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x^2+x-2) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x^2+x-2) = 0^-$, ce

qui permet de déduire par quotient que $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$.

- On a $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2-x+2) = 2-1+2=3 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x-2) = 0$; plus précisément, d'après le tableau*, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2+x-2) = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2+x-2) = 0^+$, ce qui

entraîne, par quotient, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

- 2) • Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, la droite d'équation $y=2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$, les droites d'équations $x=1$ et $x=-2$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_f$. $\hookrightarrow$ Voir droites en pointillés sur la figure.

3) . D'après le tableau des variations de f , on a : $\forall x \in]-\infty; -2[$, $f(x) > 2 > -2$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $f(x) \geq \frac{5}{3} > -2$. Par conséquent l'équation $f(x) = -2$ ne possède aucune solution dans $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

• f est continue (car dérivable, voir 1.) et strictement croissante sur $]-2; 0]$, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$, $f(0) = -1$ donc $-2 \in \left] \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x); f(0) \right]$ et d'après le corollaire

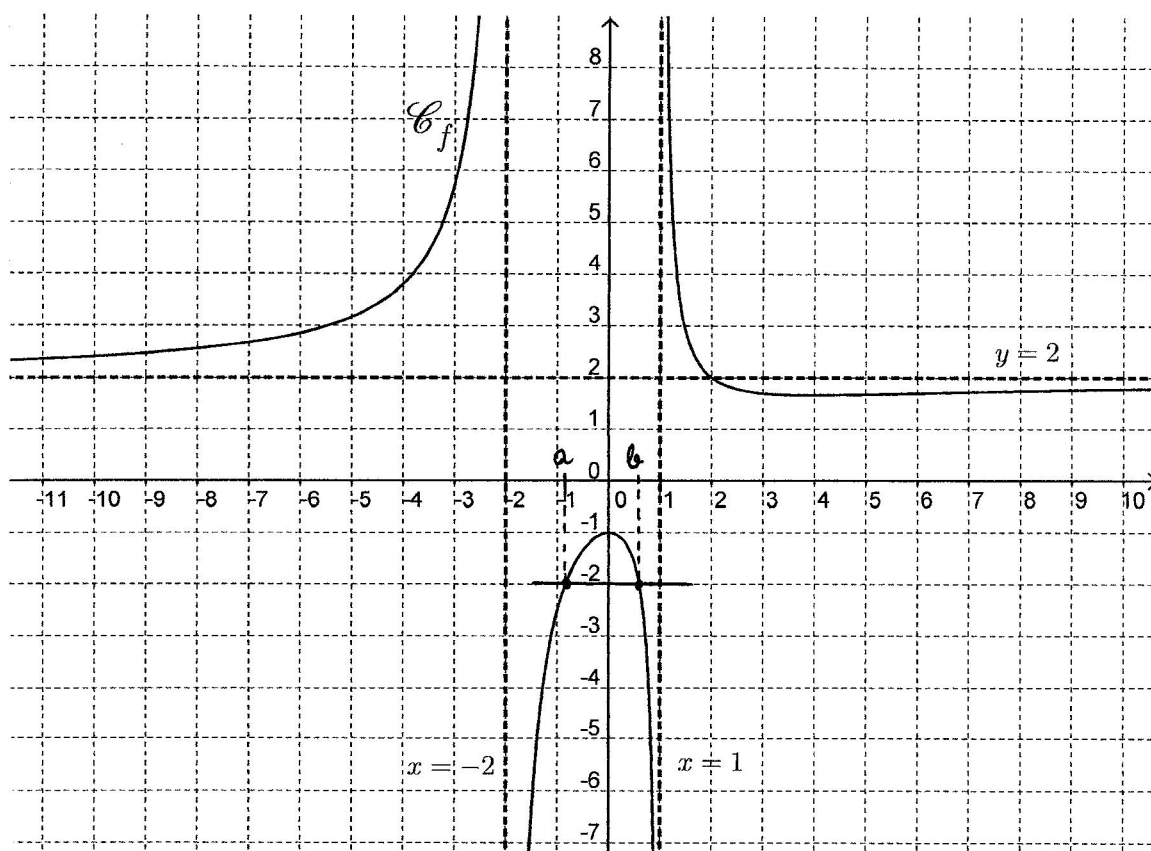
du T.V.I., l'équation $f(x) = -2$ possède une unique solution a dans $]-2; 0]$.

D'après la calculatrice (méthode par balayage), on a : $-0,85 < a < -0,84$

• f est continue (car dérivable, voir 1.) et strictement décroissante sur $]0; 1[$, on a $f(0) = -1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ donc $-2 \in \left] f(0); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \right[$ et d'après le corollaire

du T.V.I., l'équation $f(x) = -2$ possède une unique solution b dans $]0; 1[$.

D'après la calculatrice (méthode par balayage), on a : $0,59 < b < 0,6$



II 1)a) h est dérivable (donc également continue) sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	4	α	$+\infty$
$3x$	—	0	+	+	
$x - 4$	—	—	0	+	
$h'(x)$	+	0	—	0	+
h	$-\infty$	-6	-38	0	$+\infty$

((détails : $h(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 - 6 = -6$ et $h(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 - 6 = -38$))

- Si $x \neq 0$, on a $h(x) = x^3 \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{6}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{6}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.
- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-6x^2) = -\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 - 6) = -\infty$.

1)b) • D'après son tableau des variations, on voit que h possède un maximum égal à -6 sur $] -\infty; 4]$. Ainsi, pour tout $x \in] -\infty; 4]$, on a $h(x) \leq -6 < 0$, ce qui prouve que l'équation $h(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $] -\infty; 4]$.

- La fonction h est continue et strictement croissante sur $]4; +\infty[$; on a $h(4) = -38$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ donc $0 \in]h(4); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$ et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $]4; +\infty[$.
- Bilan : l'équation $h(x) = 0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.
- La calculatrice (méthode par balayage) fournit : $6,15 < \alpha < 6,16$.

1)c) On déduit du tableau des variations de h complété (voir 1.a.) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h(x)$	—	0	+

2)a) On peut écrire $\sqrt{x^2 + 1} = u[v(x)]$, avec $v : x \mapsto x^2 + 1$ et $u : x \mapsto \sqrt{x}$.

- On a par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$, soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ ⁽¹⁾.
- D'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-9x) = +\infty$.

Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 9x - 4) = -\infty$ ⁽²⁾.

D'après (1) et (2), on déduit par produit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

• On a par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ ⁽³⁾.

D'autre part, si $x \neq 0$, $x^2 - 9x - 4 = x^2 \left(1 - \frac{9}{x} - \frac{4}{x^2}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{9}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient par produit

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 9x - 4) = +\infty$ ⁽⁴⁾.

D'après (3) et (4), on déduit par produit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2)b) On a $f = u\sqrt{v}$, où $u : x \mapsto x^2 - 9x - 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit et somme) et $v : x \mapsto x^2 + 2$ est dérivable (par somme) et strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et produit et :

$$f' = u'\sqrt{v} + u(\sqrt{v})' = u'\sqrt{v} + u \frac{v'}{2\sqrt{v}}.$$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x - 9)\sqrt{x^2 + 2} + (x^2 - 9x - 4) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}}$,

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{(2x - 9)\sqrt{x^2 + 2}^2}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{x(x^2 - 9x - 4)}{\sqrt{x^2 + 2}},$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{(2x - 9)(x^2 + 2) + x^3 - 9x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^3 + 4x - 9x^2 - 18 + x^3 - 9x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 + 2}},$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{3x^3 - 18x^2 - 18}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{3(x^3 - 6x^2 - 6)}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{3h(x)}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

2)c) Comme $3 > 0$ et $\sqrt{x^2 + 2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $h(x)$. D'où, d'après 1.c. et 2.a. :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$