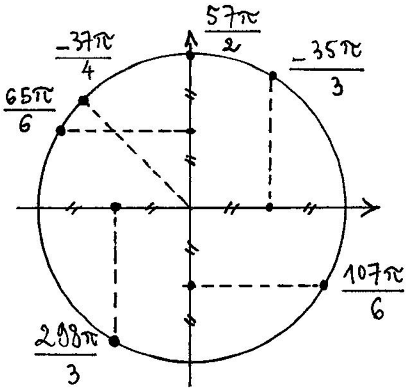
Séance d'A.P. du mercredi 19 novembre (quelques corrections) 2014/2015

1)



• $\frac{65\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{60\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 10\pi = \underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\text{valeur principale}} + 5\times 2\pi$

donc $\cos\frac{65\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

et $\sin\frac{65\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

• $-\frac{37\pi}{4} = \frac{3\pi - 40\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 10\pi = \underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\text{valeur principale}} - 5\times 2\pi$

donc $\cos\left(-\frac{37\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{37\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\frac{57\pi}{2} = \frac{\pi + 56\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 28\pi = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{valeur principale}} + 14\times 2\pi$ donc $\cos\frac{57\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

et $\sin\frac{57\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

• $\frac{298\pi}{3} = \frac{-2\pi + 300\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 100\pi = \underbrace{-\frac{2\pi}{3}}_{\text{valeur principale}} + 50\times 2\pi$ donc $\cos\frac{298\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

et $\sin\frac{298\pi}{3} = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\frac{107\pi}{6} = \frac{108\pi - \pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 18\pi = \underbrace{-\frac{\pi}{6}}_{\text{valeur principale}} + 9\times 2\pi$ donc $\cos\left(\frac{107\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\frac{107\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

• $-\frac{35\pi}{3} = \frac{\pi - 36\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 12\pi = \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\text{valeur principale}} - 6\times 2\pi$ donc $\cos\left(-\frac{35\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

et $\sin\left(-\frac{35\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) c) La résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $2\cos^2 x = 4 + 7\cos x$ (faite en A.P. → voir à la fin (4)) fournit les solutions : $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ et $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}$

• $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \in [50\pi ; 54\pi] \iff 50\pi \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 54\pi \underset{(\text{car } \pi>0)}{\iff} 50 \leqslant \frac{2}{3} + 2k \leqslant 54$

$\iff 50 - \frac{2}{3} \leqslant 2k \leqslant 54 - \frac{2}{3} \iff \frac{148}{3} \leqslant 2k \leqslant \frac{160}{3}$

$\underset{(\text{car } 2>0)}{\iff} \underbrace{\frac{74}{3}}_{\simeq 24,7} \leqslant k \leqslant \underbrace{\frac{80}{3}}_{26,7} \iff k \in \{25 ; 26\}$ car $k\in\mathbb{Z}$

• $-\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \in [50\pi ; 54\pi] \iff 50\pi \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \leqslant 54\pi \underset{(\text{car } \pi>0)}{\iff} 50 \leqslant -\frac{2}{3} + 2k' \leqslant 54$

$\iff 50 + \frac{2}{3} \leqslant 2k' \leqslant 54 + \frac{2}{3} \iff \frac{152}{3} \leqslant 2k' \leqslant \frac{164}{3}$

$\underset{(\text{car } 2>0)}{\iff} \underbrace{\frac{76}{3}}_{\simeq 25,3} \leqslant k' \leqslant \underbrace{\frac{82}{3}}_{\simeq 27,3} \iff k \in \{26 ; 27\}$

Finalement, les solutions de l'équation appartenant à l'intervalle $[50\pi ; 54\pi]$ sont :

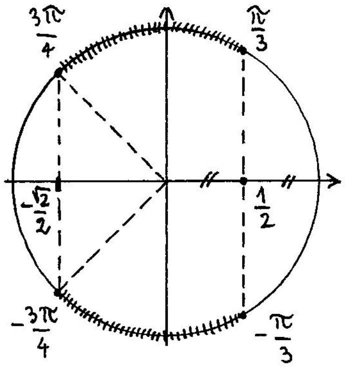
$$\frac{2\pi}{3} + 2\times 25\pi = \frac{2\pi}{3} + 50\pi = \frac{2\pi + 150\pi}{3} = \frac{152\pi}{3},$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\times 26\pi = \frac{2\pi}{3} + 52\pi = \frac{2\pi + 156\pi}{3} = \frac{158\pi}{3},$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\times 26\pi = -\frac{2\pi}{3} + 52\pi = \frac{156\pi - 2\pi}{3} = \frac{154\pi}{3} \quad \text{et}$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\times 27\pi = -\frac{2\pi}{3} + 54\pi = \frac{162\pi - 2\pi}{3} = \frac{160\pi}{3}.$$

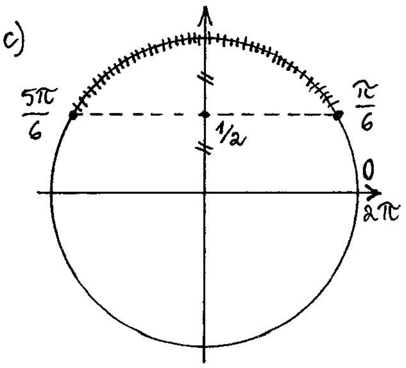
4) b)



Soit $x \in]-\pi, \pi]$;

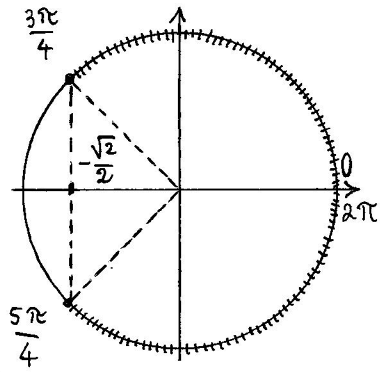
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left]-\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4}\right[$$

c)



Si $x \in [0 ; 2\pi[$:

$$\sin x - \frac{1}{2} \geq 0 \iff \sin x \geq \frac{1}{2}$$
$$\iff x \in \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right]$$



Si $x \in [0 ; 2\pi[$:

$$\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff x \in \left[0 ; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} ; 2\pi\right[$$

On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$\sin x - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq 0 \iff x \in \left[0 ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} ; 2\pi\right[$

(4) 3)c) [#] $2\cos^2 x = 4 + 7\cos x \iff 2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0$

$\iff \underbrace{2X^2 - 7X - 4 = 0}_{T(X)}$, en posant $X = \cos x$.

Le discriminant du trinôme $T(X)$ vaut $\Delta = 81 > 0$; l'équation $T(X) = 0$ possède donc deux solutions distinctes : $X_1 = \dfrac{7-9}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{7+9}{4} = 4$.

Par conséquent : [#] $\iff \left(\cos x = -\dfrac{1}{2} \text{ ou } \cos x = 4\right)$

$\iff \cos x = -\dfrac{1}{2}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1;1]$.

$\iff x \in \left\{\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$