Correction du devoir de Pâques

• Exercice I

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, somme et produit et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$g'(x) = \mathrm{e}^x[\cos(2x) + 2\sin(2x)] + \mathrm{e}^x[-2\sin(2x) + 4\cos(2x)] = 5\mathrm{e}^x\cos(2x)$.

2) On déduit du calcul précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{5}g'(x) = \mathrm{e}^x\cos(2x)$, ce qui prouve que $\dfrac{1}{5}g$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x\cos(2x)$. Par conséquent,
$\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\mathrm{e}^x[\cos(2x) + 2\sin(2x)]\right]_0^{\pi} = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{\pi}(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + 2\underbrace{\sin 2\pi}_{0}) - \frac{1}{5}\mathrm{e}^0(\underbrace{\cos 0}_{1} + 2\underbrace{\sin 0}_{0})$,
d'où $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)$.

3) On a $\displaystyle\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\text{par linéarité}} \int_0^{\pi} (\mathrm{e}^x\cos^2 x + \mathrm{e}^x\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$, soit
$\displaystyle\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1})\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^{\pi} = \mathrm{e}^{\pi} - 1$.

D'autre part, $\displaystyle\mathrm{I} - \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\sin^2 x\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\text{par linéarité}} \int_0^{\pi} (\mathrm{e}^x\cos^2 x - \mathrm{e}^x\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$,
soit $\displaystyle\mathrm{I} - \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos(2x)})\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)$, d'après 2).

Ainsi, I et J sont solutions du système $\begin{cases} \mathrm{I} + \mathrm{J} = \mathrm{e}^{\pi} - 1 & (1) \\ \mathrm{I} - \mathrm{J} = \dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1) & (2) \end{cases}$.

En additionnant membre à membre (1) et (2), on obtient $2\mathrm{I} = \dfrac{6}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)$, soit $\mathrm{I} = \dfrac{3}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)$.
Enfin, $\mathrm{I} = \mathrm{e}^{\pi} - 1 - \mathrm{I} = \dfrac{2}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)$.

• Exercice II

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par composition et quotient et :
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\} : f'(x) = \dfrac{(2-x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) - (-1) \times \mathrm{e}^{-x}}{(2-x)^2} = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{-x}}{(2-x)^2}$.
Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a $e^{-x} > 0$ et $(2-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$, d'où :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

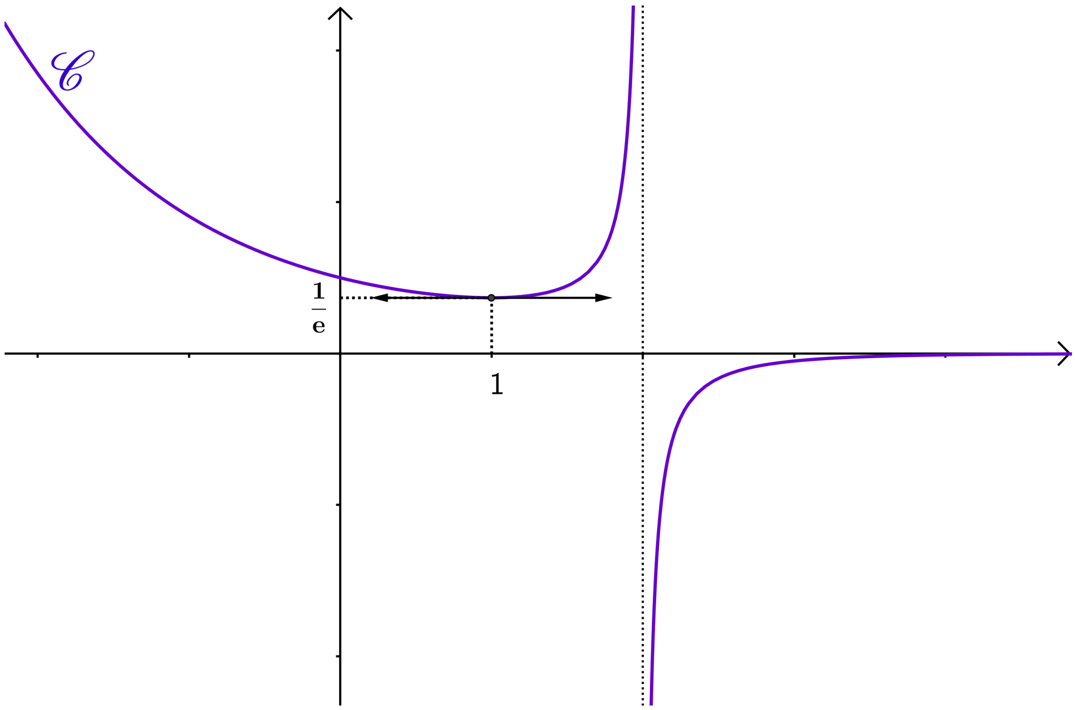
(Détail : $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$)

Justification des limites :
Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)\mathrm{e}^x}$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)\mathrm{e}^x = -\infty$ puis par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• Si $x < 2$, on a par produit $(2-x)\mathrm{e}^x > 0$. D'autre part, $(2-x)\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 2\times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)\mathrm{e}^x = 0^+$ puis par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Voici à titre de curiosité l'allure du graphe $\mathscr{C}$ de la fonction f :



(b) D'après le tableau des variations précédent, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$. Par conséquent, lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $H : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, somme et produit et $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = a\times \mathrm{e}^{-x} + (ax+b)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$. Pour que H soit une primitive de $h : x \mapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour que $H' = h$ sur $\mathbb{R}$), il suffit donc que les réels a et b soient solutions du système :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donc $H : x \mapsto (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$.

$\hookrightarrow$ On a $J = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ donc $J = [H(x)]_0^1 = [(-x-3)\mathrm{e}^{-x}]_0^1$, d'où :
$J = -4\mathrm{e}^{-1} - (-3)\mathrm{e}^{-0} = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

(b) Si $x \in [0;1]$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc comme $x^2 \geqslant 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}}x^2 \leqslant x^2 f(x) \leqslant \frac{1}{2}x^2 \ .$$

Par croissance de l'intégrale (vu que $0 \leqslant 1$), on déduit que :

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}x^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x$$

soit $\left[\dfrac{1}{3\mathrm{e}}x^3\right]_0^1 \leqslant K \leqslant \left[\dfrac{1}{6}x^3\right]_0^1$, ou encore : $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

(c) On a $J + K = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, d'où par linéarité de l'intégrale :

$J+K = \displaystyle\int_0^1 \left[(2+x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(2-x)(2+x)\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x$, d'où :

$J + K = \displaystyle\int_0^1 \frac{(2^2-x^2)\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale) et finalement $J + K = 4I$.

(d) On a $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$ donc $3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant J + K \leqslant 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{6}$, soit :

$3 - \dfrac{11}{3\mathrm{e}} \leqslant 4I \leqslant \dfrac{19}{6} - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$, d'où $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} \leqslant I \leqslant \dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (vu que $4 > 0$).

Or $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} \approx 0,41277718$ et $\dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,42378723$ donc $\underbrace{I \approx 0,42}_{\text{à } 10^{-2} \text{ près}}$.