Correction de l'exercice VI du polycopié "Fonctions sin et cos : exercices".

- Question préliminaire
  - En posant $a = x$ et $b = 2x$, on obtient :

    $\sin 3x = \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$.
  - En posant $a = b = x$, on obtient :

    $\cos 2x = \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos^2 x - \sin^2 x$, soit

    $\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$,

    et $\sin 2x = \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = 2 \sin x \cos x$.
  - On en déduit que $\sin 3x = \sin x (1 - 2\sin^2 x) + 2 \sin x \cos^2 x$, d'où

    $\sin 3x = \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x (1 - \sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

- 1) - Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(-x) = \cos(-3x) - 3\cos(-x) = \cos 3x - 3\cos x$ (car la fonction cos étant paire, on a pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(-a) = \cos a$), d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, ce qui prouve que f est paire.

  $\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  - Soit $x \in \mathbb{R}$; on a $f(x+2\pi) = \cos[3(x+2\pi)] - 3\cos(x+2\pi)$, d'où

    $f(x+2\pi) = \cos(3x + 3\times 2\pi) - 3\cos(x+2\pi) = \cos(3x) - 3\cos x$ (car cos est 2π-périodique donc pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(a + k\times 2\pi) = \cos a$).

    Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$, ce qui prouve que f est 2π-périodique.

    $\mathcal{C}$ est donc invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

- 2) $f : x \mapsto \cos(3x) - 3\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, produit et somme, et pour tout réel x, $f'(x) = 3\cos'(3x) - 3\cos' x = -3\sin(3x) + 3\sin x$.

  On déduit de la question préliminaire que :

  $f'(x) = -3(3\sin x - 4\sin^3 x) + 3\sin x = 12\sin^3 x - 6\sin x$.

- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12 \sin x \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)$

  $= 12 \sin x \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

  Si $x \in [0;\pi]$, on a $\sin x \geqslant 0$,

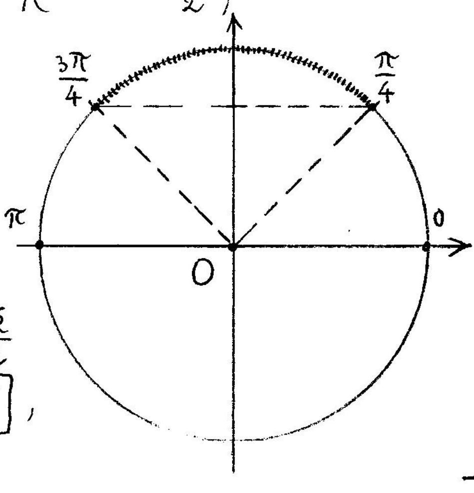
  donc $\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

  et si $x \in]0;\pi[$, on a $\sin x > 0$, donc

  $f'(x)$ est du signe de $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0;\pi]$.

  Or si $x \in [0;\pi]$, $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant 0 \iff \sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\iff x \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right]$,

  d'où :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
f	-2	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	-2

$f(0) = \cos 0 - 3\cos 0 = 1 - 3 = -2$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} - 3\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{9\pi}{4} - 3\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) - 3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

4)