1) a) 5 est un nombre premier et 8 n'est pas multiple de 5 donc 5 et 8 sont premiers entre eux. Alors, d'après le théorème de Bézout, l'équation $8x-5y=1$ admet des solutions, et donc l'équation $8x-5y=3$ en admet aussi.

On remarque que le couple $(x_0\,;y_0)=(1;1)$ est un couple solution de (E)

Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers relatifs, solution de (E).

$\begin{cases} 8x-\ 5y=3 \\ 8x_0-5y_0=3 \end{cases}$ Par différence membre à membre, $8(x-x_0)-5(y-y_0)=0$.

Donc $8(x-x_0)=5(y-y_0)$ (a). Donc 8 divise le produit $5(y-y_0)$.

8 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 8 divise $y-y_0$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $y-y_0=8k$, donc tel que $y=8k+y_0$.

En reportant dans l'égalité (a), on obtient $5(8k)=8(x-x_0)$. Donc $x=x_0+5k$.

Donc si $(x\,;y)$ vérifie (E), il existe un entier relatif k tel que $(x\,;y)=(5k+x_0\,;8k+y_0)$.

<u>Réciproquement :</u> soit k un entier relatif, soit $(x\,;y)=(5k+x_0\,;8k+y_0)$.

$8x-5y=8(5k+x_0)-5(8k+y_0)=8x_0-5y_0=3$ donc $(x\,;y)$ est bien solution.

Donc l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}$ est : $S=\{(x\,;y)=(5k+1;8k+1\,),k\in\mathbb{Z}\}$.

b) Soient m, p et q trois entiers relatifs tels que $m=8p+1$ et $m=5q+4$.

$8p+1=5q+4$ donc $8p-5q=4-1=3$ et donc le couple $(p\,;q)$ est bien solution de l'équation (E).

Donc d'après la question précédente, il existe un entier relatif k tel que $p=5k+1$.

Alors, $m=8(5k+1)+1=40k+9$ et donc on a bien $m\equiv 9\quad[40]$

c) Il existe un entier relatif k tel que $m=40k+9$.

$40k+9\geq 2000 \quad\Leftrightarrow\quad 40k\geq 1991 \quad\Leftrightarrow\quad k\geq\dfrac{1991}{40}$ et $\dfrac{1991}{40}=49.775$

Donc le plus petit entier naturel m s'écrivant sous la forme $m=40k+9$, supérieur ou égal à2000, est 2009, obtenu pour $k=50$.

2) a) $2^3=8$ et $8\equiv 1\quad[7]$ donc pour tout entier naturel k, $\left(2^3\right)^k\equiv 1^k\quad[7]$, c'est-à-dire $2^{3k}\equiv 1\quad[7]$

b) $2009=2007+2=3\times 669+2$ donc $2^{2009}=2^{3\times 669}\times 2^2$ et d'après la question a), $2^{2009}\equiv 1\times 2^2\quad[7]$, c'est-à-dire que $2^{2009}\equiv 4\quad[7]$. 4 est un entier naturel compris entre 0 et 7 – 1 donc le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est égal à 4.

3) a) $1001 = 7 \times 11 \times 13$ donc $1001 \equiv 0 \quad [7]$ et $1000 \equiv -1 \quad [7]$, ce qui nous donne $10^3 \equiv -1 \quad [7]$.

Autre méthode : $10 \equiv 3 \quad [7]$ donc $10^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \quad [7]$ et $10^3 \equiv 2 \times 3 \equiv 6 \equiv -1 \quad [7]$

b) Alors, le nombre $N = \overline{a00b} = a \times 10^3 + b$ vérifie : $N \equiv b - a \quad [7]$

Donc l'ensemble cherché est l'ensemble des nombres de la forme $N = \overline{a00b}$ où a et b sont congrus modulo 7, donc où la différence $a - b$ est un multiple de 7.

Les nombres entiers a et b sont compris respectivement entre 1 et 9, et entre 0 et 9.

Donc $N = \overline{a00b}$ est multiple de 7 si et seulement si $a - b$ prend une des valeurs -7, 0 ou 7

Les nombres cherchés sont donc :

1001 1008 2002 2009 3003 4004 5005 6006 7000 7007 8001 8008 9002 9009