Interrogation sur le calcul de primitives : éléments de correction

$\boxed{A}$ a)* $f(x) = 18\,e^{-3x} + e^{\frac{1}{5}x} - 7 \Rightarrow F(x) = 18 \times \frac{1}{-3} e^{-3x} + \frac{1}{1/5} e^{\frac{1}{5}x} - 7x + c = -6\,e^{-3x} + 5\,e^{\frac{x}{5}} - 7x + c$.

b) $f(x) = -2(2x-1)^5 = -u'u^5$ avec $u : x \mapsto 2x-1$, d'où $F = -\frac{1}{5+1} u^{5+1} + c = -\frac{1}{6} u^6 + c$,

soit $F(x) = -\frac{1}{6}(2x-1)^6 + c$

c) $f(x) = -\frac{6}{7} x^5 + 2x^4 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = -\frac{6}{7} \times \frac{1}{5+1} x^{5+1} + 2 \times \frac{1}{4+1} x^{4+1} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + c$,

soit $F(x) = -\frac{1}{7} x^6 + \frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{2} x + c$.

d) $f(x) = -\frac{1}{2} \frac{6x-2}{\sqrt{3x^2-2x}} = -\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto 3x^2 - 2x$, d'où $F = -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} + c$, soit

$F(x) = -\sqrt{3x^2-2x} + c$. $F(1) = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{3-2} + c = -1 \Leftrightarrow c = 0$, d'où $F(x) = -\sqrt{3x^2-2x}$.

e) $f(x) = \frac{1}{2} \frac{4x+10}{(2x^2+10x+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 2x^2 + 10x + 1$, d'où $F = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{u} + c$, soit

$F(x) = -\frac{1}{2(2x^2+10x+1)} + c$

f) $f(x) = -15\cos(5x) + 3\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \Rightarrow F(x) = -15 \times \frac{1}{5} \sin(5x) - 3 \times \frac{1}{1/3} \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + c$, soit

$F(x) = -3\sin(5x) - 9\cos\left(\frac{x}{3}\right) + c$.

(*) $F(0) = 2 \Leftrightarrow -6 + 5 + c = 2 \Leftrightarrow c = 3$, d'où $F(x) = -6\,e^{-3x} + 5\,e^{\frac{x}{5}} - 7x + 3$

$\boxed{B}$ a) $f(x) = \frac{3}{2}(6x-2)(3x^2-2x+5)^2 = \frac{3}{2} u'u^2$ avec $u : x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$, d'où $F = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2+1} u^{2+1} + c$,

soit $F = \frac{1}{2} u^3 + c$, ou encore $F(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2x+5)^3 + c$. $F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} 6^3 + c = 2$

$\Leftrightarrow c = 2 - 108 = -106$, d'où $F(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2x+5)^3 - 106$.

b) $f(x) = 3x^6 - \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 - \frac{2}{3} \Rightarrow F(x) = 3 \times \frac{1}{6+1} x^{6+1} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4+1} x^{4+1} - 2 \times \frac{1}{2+1} x^{2+1} - \frac{2}{3} x + c$, soit

$F(x) = \frac{3}{7} x^7 - \frac{1}{15} x^5 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} x + c$

c) $f(x) = 21\cos(7x) - 15\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \Rightarrow F(x) = 21 \times \frac{1}{7} \sin(7x) + 15 \times \frac{1}{1/3} \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + c$, soit

$F(x) = 3\sin(7x) + 45\cos\left(\frac{x}{3}\right) + c$.

d) $f(x) = 16\,e^{-4x} - 4\,e^{\frac{1}{4}x} + 1 \Rightarrow F(x) = 16 \times \frac{1}{-4} e^{-4x} - 4 \times \frac{1}{1/4} e^{\frac{1}{4}x} + x + c$, soit

$F(x) = -4\,e^{-4x} - 16\,e^{\frac{x}{4}} + x + c$. $F(0) = -1 \Leftrightarrow -4 - 16 + c = -1 \Leftrightarrow c = 20 - 1 = 19$, d'où

$F(x) = -4\,e^{-4x} - 16\,e^{x/4} + x + 19$.

e) $f(x) = 4(2x-1)^{-3} = 2 \times 2(2x-1)^{-3} = 2u'u^{-3}$ avec $u : x \mapsto 2x-1$, d'où $F = 2 \times \frac{1}{-3+1} u^{-3+1} + c$,

soit $F = -u^{-2} + c = -\frac{1}{u^2} + c$, ou encore $F(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2} + c$

f) $f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{12x+4}{\sqrt{6x^2+4x+1}} = \frac{1}{4} \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto 6x^2 + 4x + 1$, d'où $F = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{u} + c = \frac{1}{2}\sqrt{u} + c$,

soit $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{6x^2+4x+1} + c$.