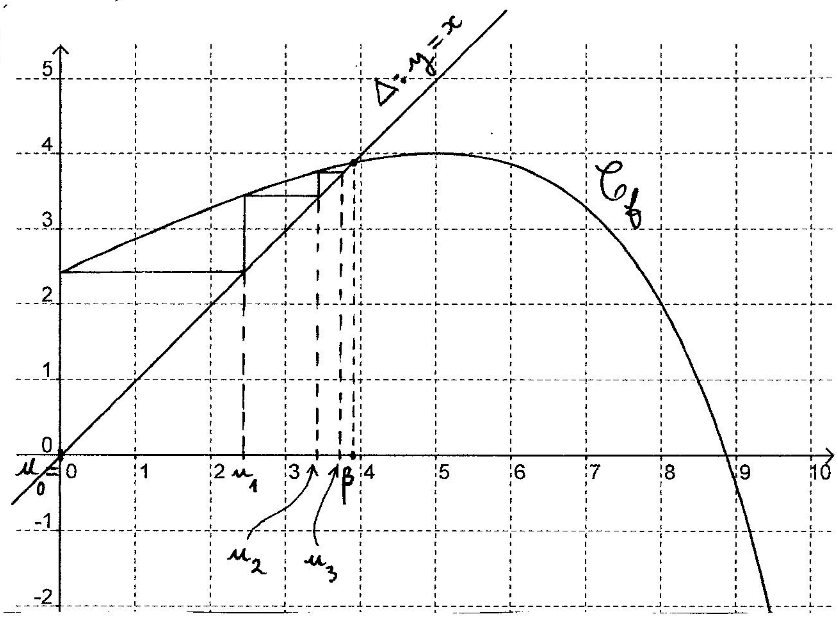
TS - Correction de l'exercice "Fonction exp, T.V.I., suites, convergence monotone".

• I) 1) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - e^{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, par produit, somme et composition et $\forall x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}\right)$. Comme $\frac{1}{2} > 0$,

on a $f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - e^{\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}} \geqslant 0 \iff e^0 \geqslant e^{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}} \iff 0 \geqslant \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, d'où $f'(x) \geqslant 0 \iff \frac{1}{2}x \leq \frac{5}{2} \iff x \leq 5$ (car $2 > 0$)

On en déduit que f est croissante (resp. décroissante) sur $[0;5]$ (resp. sur $[5;+\infty[$).

2)



→ On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\Delta : y = x$.

• II) 1) g est dérivable sur $[0;+\infty[$ de dérivée $g' : x \mapsto f'(x) - 1$ (par somme), soit pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}$. Comme $\exp > 0$, on en déduit que $\forall x \in [0;+\infty[$, $g'(x) < 0$, ce qui prouve que g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

D'autre part, $\forall x \in [0;+\infty[$, $\boxed{g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - e^{\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}} - x = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - e^{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}}^{*}$.

Par produit et somme, on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) = +\infty$ et comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on déduit par composition que $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}} = +\infty$. Finalement, par produit et somme*, on obtient $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. D'où le tableau des variations de g suivant :

x	0	$+\infty$
g	$\frac{5}{2} - e^{-5/2}$ ↘	$-\infty$

$$g(0) = -\frac{1}{2}\times 0 + \frac{5}{2} - e^{\frac{1}{2}\times 0 - \frac{5}{2}}$$
$$= \frac{5}{2} - e^{-\frac{5}{2}}$$

Notons que $-\frac{5}{2} < 0$, donc $e^{-5/2} < 1$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, d'où $g(0) > \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} > 0$.

2) Remarquons que l'équation $f(x) = x$ équivaut à $g(x) = 0$.

La fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur

$[0;+\infty[$, $g(0)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ donc $0\in\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x);0\right]$ et d'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution β dans $[0;+\infty[$.

La calculatrice fournit l'encadrement $3,86<\beta<3,87$.

Conclusion : l'équation $f(x)=x$ possède pour unique solution β.

- III) 1) Notons, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\beta$.

– <u>Initialisation</u> : on a $u_1=f(u_0)=f(0)\approx 2,4$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1<3,86<\beta$, ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

– <u>Hérédité</u> : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n\in\mathbb{N}$; on a donc $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\beta<3,87\leqslant 5$, d'où par croissance de f sur $[0;5]$, $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(\beta)$, soit $u_1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\beta$ car $f(\beta)=\beta$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. Comme $u_1>0$, on en déduit que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\beta$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

– Cela prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\beta$.

2) D'après le résultat obtenu à la question précédente, (u_n) est donc une suite croissante et majorée (par β), ce qui prouve qu'elle converge vers un réel l. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$, on a $l\geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{On a pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n). \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l \\ \bullet\ \text{On a, par continuité de } f \text{ sur } [0;+\infty[, \\ \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(l) \end{array}\right\}\ \text{On en déduit que } l=f(l).$$

l est donc solution positive de l'équation $f(x)=x$. D'après II.2., on a donc forcément $l=\beta$.

Bilan : (u_n) converge bien vers β.