Épreuve de Mathématiques

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Février 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Chaque exercice sera traité sur une copie séparée.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les trois parties sont relatives à la même situation mais sont indépendantes.

Une usine produit des sacs.

Partie A

Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Dans cette partie, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $P(A) = 0{,}1$ et $P(B) = 0{,}2$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».

Partie B

On suppose que la probabilité qu'un sac soit défectueux est égale à 0,28.
On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

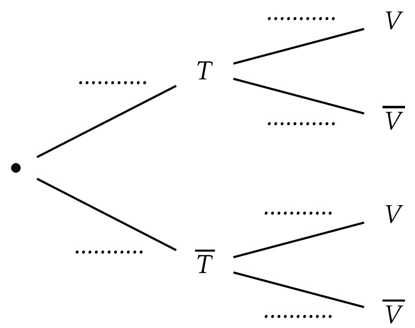
1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier soigneusement.
2. Sans utiliser la calculatrice, donner la valeur exacte de $P(X \geqslant 1)$.
3. Calculer $P(X \geqslant 20)$. Arrondir le résultat au centième.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Partie C

On suppose que la probabilité qu'un sac soit défectueux est égale à 0,28.
L'usine possède deux chaînes de fabrication pour ses sacs.
25% des sacs issus de la chaîne de fabrication F_1 sont défectueux.
35% des sacs issus de la chaîne de fabrication F_2 sont défectueux.
On considère les évènements :

- T : le sac est issu de la chaîne de fabrication F_1.
- V : le sac est défectueux.

1. On pose $x = P(T)$.
   (a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
   (b) En déduire une égalité vérifiée par x puis la valeur exacte de x.



2. Sachant qu'un sac est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit issu de la chaîne de fabrication F_1 ? On arrondira le résultat au centième près.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose, *dans cette partie seulement*, que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Démontrer les deux conjectures établies à la question 1.
   Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

   $$g(x) = 1 - x + e^x.$$

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x :

   $$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
a ← −1
b ← 0
Tant que b − a > 0,1
    m ← (a + b)/2
    Si f(a) × f(m) < 0 alors
        b ← m
    Sinon
        a ← m
    Fin Si
Fin de Tant que
Afficher a
Afficher b
```

(a) Exécuter cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous, que l'on recopiera sur la copie.

Étape	m	a	b	$b-a$
Étape 0	////	-1	0	
Étape 1				
Étape 2				

(b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

7. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
(b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui, à tout nombre complexe z non nul, associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de a.
   (b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ un nombre réel.
   (b) Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.