TS **BAC BLANC DE MATHÉMATIQUES** (Février 2019) **CORRIGÉ**

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

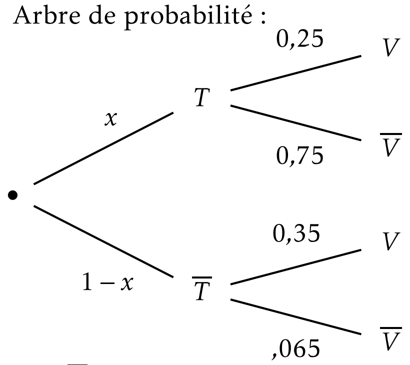
1. $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$ car les évènements A et B sont indépendants.
2. $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}02 = 0{,}28$.
3. $P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$.

Partie B

1. On répète $n = 100$ fois la même épreuve : "choisir un sac".
   Cette épreuve a deux issues :
   - le succès : "le sac est défectueux" de probabilité $p = 0{,}28$.
   - l'échec : "le sac n'est pas défectueux" de probabilité $1 - p = 0{,}72$.
   Les épreuves sont identiques et indépendantes.
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100\ ;\ 0{,}28)$ de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}28$)
   Autrement dit, $\forall k \in [\![0{,}100]\!]$, $\mathrm{P}(X = k) = \binom{100}{k} \times 0{,}28^k \times 0{,}72^{100-k}$
2. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}72^{100}$.
3. $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx 0{,}97$.
4. $E(X) = 100 \times 0{,}28 = 28$. Sur 100 sacs prélevés, il y a en moyenne 28 sacs défectueux.

Partie C

1. (a) Arbre de probabilité :



   (b) T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(V) = P(T \cap V) + P(\overline{T} \cap V) \qquad (\star)$
   $(\star) \Leftrightarrow P(V) = P(T) \times P_T(V) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(V)$
   $(\star) \Leftrightarrow 0{,}28 = 0{,}25x + 0{,}35(1 - x)$
   $(\star) \Leftrightarrow 0{,}1x = 0{,}07$
   $(\star) \Leftrightarrow x = 0{,}7$.

2. On cherche $P_V(T) = \dfrac{P(T \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}7 \times 0{,}25}{0{,}28} \approx 0{,}63$.
   Sachant qu'un sac est défectueux, la probabilité qu'il soit issu de la chaîne de fabrication A est d'environ 0,63.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1. La suite (u_n) semble croissante et converger vers 5.
2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition : « $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$ ».
   Initialisation : $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0{,}8^0 = 5 - 4 = 1$ donc $u_0 = 5 - 4 \times 0{,}8^0$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$.
   D'après l'énoncé, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$
   D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$
   Donc $u_{n+1} = 0{,}8(5 - 4 \times 0{,}8^n) + 1 = 4 - 4 \times 0{,}8^{n+1} + 1 = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$.
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : La proposition $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, on a :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = (5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}) - (5 - 4 \times 0{,}8^n) = 4 \times 0{,}8^n(1 - 0{,}8) = 0{,}8^{n+1}$.
   Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ avec $-1 < q < 1$) donc, par limite de produit et somme, (u_n) converge vers 5.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = \frac{4}{5}u_n + c - 5c = \frac{4}{5}u_n - 4c = \frac{4}{5}(u_n - 5c) = \frac{4}{5}v_n$
   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$.
2. Pour tout entier naturel n, $v_n = (1 - 5c) \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 5c$.
   Or (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$ (avec $-1 < q < 1$) donc la suite (v_n) converge vers 0 donc, par limite de somme, la suite (u_n) converge vers $5c$.
   L'apiculteur atteint son objectif si et seulement si $5c = 10$ c'est à dire $c = 2$.
   Pour que le nombre d'abeilles tende vers 100 000, il faut que l'apiculteur rachète chaque année 20 000 abeilles.

EXERCICE 3 (6 points)

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   Dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x > 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

   Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est 2 donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. **Limite de f en $-\infty$:**

   $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc, par limite d'inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$ donc, par limite de somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   Limite de f en $+\infty$:

   Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par limite d'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc, par limite de somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. f est dérivable comme somme et quotients de fonctions dérivables.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 + \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1-x+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = g(x)\mathrm{e}^{-x}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5. Sur $\mathbb{R}$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

   D'après la calculatrice, $f(-1) \approx -2{,}7$, $f(\alpha) = 0$ et $f(0) = 1$.

   On a $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$, donc, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $-1 < \alpha < 0$.

6. (a) Tableau d'étapes :

Étape	m	a	b	$b-a$
Étape 0	////	-1	0	1
Étape 1	$-0{,}5$	$-0{,}5$	0	0,5
Étape 2	$-0{,}25$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0,25
Étape 3	$-0{,}375$	$-0{,}5$	$-0{,}375$	0,125
Étape 4	$-0{,}4375$	$-0{,}4375$	$-0{,}375$	0,0625

   (b) Les valeurs affichées par cet algorithme représentent les bornes d'un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à ${}^{1}0^{-1}$.

7. (a) Comme f est dérivable en 0 alors T a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = 2x+1$.

   (b) Pour étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T, on étudie sur $\mathbb{R}$, le signe de $D(x) = f(x) - (2x+1) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 2x - 1 = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}(1-\mathrm{e}^x)$.

   Dressons le tableau de signe de $D(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de x		$-$	0	+	
signe de e^x		+		+	
signe de $1-\mathrm{e}^x$		+	0	$-$	
signe de $D(x)$		$-$	0	$-$	

   On en déduit que $\mathcal{C}$ est située en dessous de T sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 (4 points)

1. (a) $a = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \text{e}^{\text{i}\dfrac{3\pi}{4}}$

   (b) $f(a) = a + \dfrac{1}{a} = \text{e}^{\text{i}\dfrac{3\pi}{4}} + \text{e}^{-\text{i}\dfrac{3\pi}{4}} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) - \text{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

   La forme algébrique de $f(a)$ est $-\sqrt{2}$.

2. Dans $\mathbb{C}^*$: $f(z) = 1 \quad (\star)$

   $(\star) \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = 1$

   $(\star) \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

   $z^2 - z + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$

   $(\star) \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - \text{i}\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{1 + \text{i}\sqrt{3}}{2}$

   $S = \left\{\dfrac{1 - \text{i}\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1 + \text{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$

3. (a) Le nombre complexe z s'écrit sous forme exponentielle : $|z|\text{e}^{\text{i}\theta}$.
   Le point $M(z)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1 donc $OM = 1$ ce qui veut dire que $|z| = 1$.
   Donc z peut s'écrire sous la forme $\text{e}^{\text{i}\theta}$.

   (b) $f(z) = z + \dfrac{1}{z} = \text{e}^{\text{i}\theta} + \text{e}^{-\text{i}\theta} = \cos(\theta) + \text{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \text{i}\sin(\theta) = 2\cos(\theta)$.
   Donc $f(z)$ est un nombre réel.

4. **Méthode 1** : Pour tout nombre complexe z non nul, posons $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels.
   Pour tout nombre complexe z non nul :

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \frac{1}{z} \\ &= x + \text{i}y + \frac{1}{x + \text{i}y} \\ &= x + \text{i}y + \frac{x - \text{i}y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x\left(x^2 + y^2\right) + \text{i}y\left(x^2 + y^2\right) + x - \text{i}y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x\left(x^2 + y^2 + 1\right)}{x^2 + y^2} + \text{i}\frac{y\left(x^2 + y^2 - 1\right)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

   Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché.

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } f(z) \text{ est un nombre réel.} \\ &\Leftrightarrow \frac{y\left(x^2 + y^2 - 1\right)}{x^2 + y^2} = 0 \text{ et } (x ; y) \neq (0 ; 0) \\ &\Leftrightarrow \left[y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1\right] \text{ et } (x ; y) \neq (0 ; 0) \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{E}$ est la réunion du cercle de centre O et de rayon 1 et de l'axe des abscisses privé du point O.

   Méthode 2 : Pour tout nombre complexe z non nul, posons $z = r\,\text{e}^{\text{i}\theta}$ avec r et θ réels, $r > 0$.
   Pour tout nombre complexe z non nul :

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \frac{1}{z} \\ &= r\,\text{e}^{\text{i}\theta} + \frac{1}{r}e^{-\text{i}\theta} \\ &= \left(r\cos\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\right) + \text{i}\left(r\sin\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

   Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché.

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } f(z) \text{ est un nombre réel.} \\ &\Leftrightarrow \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0 \text{ et } r > 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[r - \frac{1}{r} = 0 \text{ ou } \sin\theta = 0\right] \text{et}\, r > 0$$
$$\Leftrightarrow \left[r^2 = 1 \text{ ou } \theta = 0\,[\pi]\right] \text{et}\, r > 0$$
$$\Leftrightarrow [r = 1 \text{ ou } \theta = 0\,[\pi]] \text{ et}\, r > 0$$

Donc $\mathscr{E}$ est la réunion du cercle de centre O et de rayon 1 et de l'axe des abscisses privé du point O.