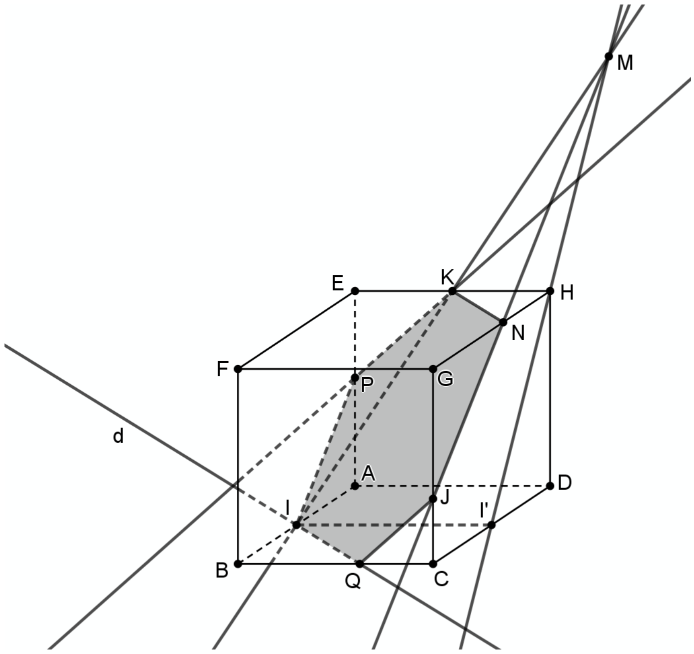
Correction du devoir de Pâques

• Exercice I



1. (a) On a $(II')//(KH)$ donc I, I', K et H sont coplanaires. Les droites (IK) et $(I'H)$ sont donc coplanaires ; comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point M. On a $I' \in (CD)$ et $(CD) \subset (CGD)$ donc $I' \in (GCD)$. D'autre part $H \in (GCD)$ donc $(I'H) \subset (GCD)$. Comme $M \in (I'H)$, on donc $M \in (GCD)$, ce qui prouve que $(GCD) \cap (IK) = \{M\}$.

   (b) • On a $M \in (IK)$ et $(IK) \subset (IJK)$ donc $M \in (IJK)$, ce qui montre que $M \in (IJK) \cap (GCD)$. D'autre part, $J \in (GC)$ et $(GC) \subset (GCD)$ donc $J \in (GCD)$, ce qui prouve que $J \in (IJK) \cap (GCD)$. Ainsi, M et J appartiennent aux deux plans sécants (IJK) et (GCD), par conséquent $(IJK) \cap (GCD) = (MJ)$.
   • On a $(MJ) \subset (GCD)$ et $(GH) \subset (GCD)$ donc (MJ) et (GH) sont coplanaires ; comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point N.
   $N \in (GH)$ et $(GH) \subset (EFG)$ donc $N \in (EFG)$. $N \in (MJ)$ et $(MJ) \subset (IJK)$ donc $N \in (IJK)$. $K \in (EH)$ et $(EH) \subset (EFG)$ donc $K \in (EFG)$, ce qui prouve que $K \in (IJK) \cap (EFG)$. Ainsi, N et K appartiennent à la fois aux plans sécants (IJK) et (EFG), par conséquent $(IJK) \cap (EFG) = (KN)$.

2. $(EFG)//(ABC)$ et $(IJK) \cap (EFG) = (KN)$ donc les plans (IJK) et (ABC) sont sécants et ont une droite d'intersection d telle que $d//(KN)$. Or $I \in (AB)$ et $(AB) \subset (ABC)$ donc $I \in (ABC)$, d'où $I \in (IJK) \cap (ABC) = d$. Ainsi, d est la parallèle à (KN) passant par I

3. • Les droites d et (BC) sont sécantes en un point Q ; on a $(IJK) \cap (FGC) = (QJ)$.
   • $(IJK) \cap (AED)$ est la droite parallèle à (QJ) passant par K ; celle-ci coupe (EA) en un point P.
   • On a alors $(IJK) \cap (EAB) = (PI)$.

- **Exercice II**

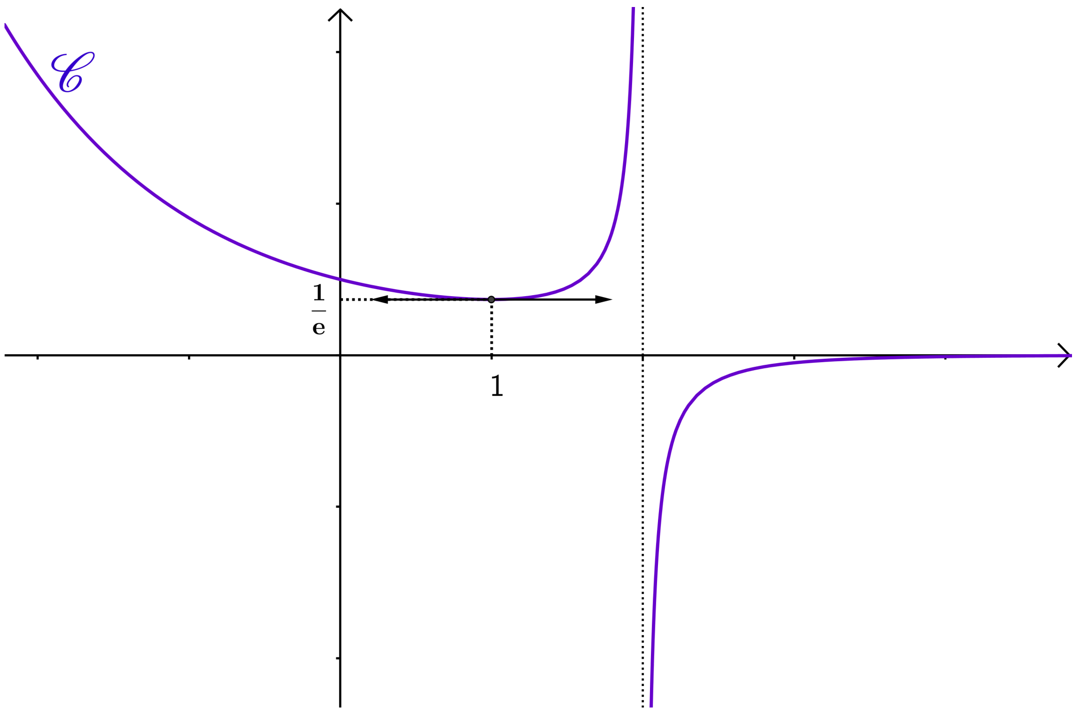
1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par composition et quotient et :
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\} : f'(x) = \dfrac{(2-x)\times(-\mathrm{e}^{-x}) - (-1)\times \mathrm{e}^{-x}}{(2-x)^2} = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{-x}}{(2-x)^2}$.
Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a $e^{-x} > 0$ et $(2-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$, d'où :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0

(Détail : $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$)

Justification des limites :
Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)\mathrm{e}^x}$.
• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)\mathrm{e}^x = -\infty$ puis par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
• Si $x < 2$, on a par produit $(2-x)\mathrm{e}^x > 0$. D'autre part, $(2-x)\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 2\times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (2-x)\mathrm{e}^x = 0^+$ puis par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Voici à titre de curiosité l'allure du graphe $\mathscr{C}$ de la fonction f :



(b) D'après le tableau des variations précédent, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$. Par conséquent, lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $H : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, somme et produit et $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = a \times \mathrm{e}^{-x} + (ax+b) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$. Pour que H soit une primitive de $h : x \mapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour que $H' = h$ sur $\mathbb{R}$), il suffit donc que les réels a et b soient solutions du système :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donc $H : x \mapsto (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$.

$\hookrightarrow$ On a $J = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ donc $J = [H(x)]_0^1 = [(-x-3)\mathrm{e}^{-x}]_0^1$, d'où :
$J = -4\mathrm{e}^{-1} - (-3)\mathrm{e}^{-0} = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

(b) Si $x \in [0;1]$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc comme $x^2 \geqslant 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}}x^2 \leqslant x^2 f(x) \leqslant \frac{1}{2}x^2 .$$

Par croissance de l'intégrale (vu que $0 \leqslant 1$), on déduit que :

$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x$$

soit $\left[\dfrac{1}{3\mathrm{e}}x^3\right]_0^1 \leqslant K \leqslant \left[\dfrac{1}{6}x^3\right]_0^1$, ou encore : $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

(c) On a $J + K = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, d'où par linéarité de l'intégrale :
$J+K = \displaystyle\int_0^1 \left[(2+x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(2-x)(2+x)\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x$, d'où :
$J + K = \displaystyle\int_0^1 \frac{(2^2 - x^2)\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale) et finalement $J + K = 4I$.

(d) On a $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$ donc $3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant J + K \leqslant 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{6}$, soit :

$3 - \dfrac{11}{3\mathrm{e}} \leqslant 4I \leqslant \dfrac{19}{6} - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$, d'où $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} \leqslant I \leqslant \dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (vu que $4 > 0$).

Or $\dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{12\mathrm{e}} \approx 0,41277718$ et $\dfrac{19}{24} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,42378723$ donc $\underbrace{I \approx 0,42}_{\text{à } 10^{-2} \text{ près}}$.