

Démonstrations « exigibles »

I Suites

Propriété : Soit (u_n) une suite divergeant vers $+\infty$ et (v_n) une suite telle que $v_n \geq u_n$ pour n assez grand. Alors (v_n) diverge également vers $+\infty$.

Démonstration : Par hypothèse, il existe un entier naturel N tel que $v_n \geq u_n$ dès que $n \geq N$. Soit M un réel quelconque. Comme (u_n) diverge vers $+\infty$, il existe un entier naturel N' tel que $u_n \in]M; +\infty[$ dès que $n \geq N'$. Posons $N'' = \max(N, N')$. Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geq N''$, on a alors $v_n \geq u_n$ et $u_n > M$, ce qui permet de déduire par transitivité que $v_n > M$.
Bilan : pour tout réel M , il existe un entier N'' tel que $v_n \in]M; +\infty[$ dès que $n \geq N''$. Cela prouve bien la divergence vers $+\infty$ de la suite (v_n) .

Propriété : Soit (u_n) une suite croissante convergeant vers un réel ℓ , alors pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq \ell$.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier N tel que $u_N > \ell$. Posons $\varepsilon = u_N - \ell$; on a $\varepsilon > 0$ donc comme (u_n) converge vers ℓ , il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ dès que $n \geq N'$. Notons $N'' = \max(N, N')$. On a en particulier $N'' \geq N'$ donc $u_{N''} < \ell + \varepsilon = u_N$. Cela contredit la croissance de (u_n) car comme $N'' \geq N$, on devrait avoir $u_{N''} \geq u_N$.

Propriété : Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Démonstration : Considérons une suite (u_n) croissante et non majorée. Soit M un réel quelconque. La suite (u_n) n'est pas majorée par M donc il existe un entier N tel que $u_N > M$. Comme (u_n) est croissante, si n est un entier naturel tel que $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N$ et comme $u_N > M$, on obtient (par transitivité) $u_n > M$.
Bilan : pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]M; +\infty[$ dès que $n \geq N$. Cela établit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Propriété : Si q est un réel appartenant à $]1; +\infty[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration : • Montrons tout d'abord par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition :

$$\mathcal{P}(n) : \text{ pour tout réel } a > 0, \text{ on a } (1+a)^n \geq 1+na$$

– Si $a > 0$, on a $(1+a)^0 = 1 = 1+0 \times a$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

– Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

Soit $a > 0$; on a $(1+a)^n \geq 1+na$ donc $(1+a) \times (1+a)^n \geq (1+a) \times (1+na)$ (vu que $1+a > 0$) donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$. Or $na^2 \geq 0$ donc $1+(n+1)a+na^2 \geq a+(n+1)a$ et finalement par transitivité : $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

– On a donc établi par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, on a $(1+a)^n \geq 1+na$.

• Comme $q > 1$, on a $a = q - 1 > 0$. On déduit du point précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q^n \geq 1+n \times (q-1)$. Or comme $q-1 > 0$, on a par produit et somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} [1+n \times (q-1)] = +\infty$. Cela entraîne par comparaison que la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

II Fonction exponentielle

Propriété : admettons l'existence (d'au moins) une fonction f dérivable sur \mathbb{R} vérifiant $f(0) = 1$ et pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$. Alors f est unique.

Démonstration : Soit g une fonction dérivable vérifiant $g(0) = 1$ et pour tout réel x , $g'(x) = g(x)$. Montrons que $g = f$.

• Prouvons tout d'abord que f ne s'annule pas.

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \underbrace{f(x)}_u \underbrace{f(-x)}_v$. La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} par composition et pour tout réel x , $h'(x) = \underbrace{f'(x)}_{u'} \times \underbrace{f(-x)}_v + \underbrace{f(x)}_u \times \underbrace{[-f'(-x)]}_{v'}$. Comme $f = f'$, on obtient $h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$, ce qui prouve que la fonction h est constante sur \mathbb{R} , égale à $h(0) = f(0)f(-0) = f(0)^2 = 1^2 = 1$. Ainsi, pour tout réel x , $f(x)f(-x) = 1$, ce qui montre en particulier que $f(x) \neq 0$.

• Comme f ne s'annule pas, on peut définir sur \mathbb{R} la fonction $k = \frac{g}{f}$. Celle-ci est dérivable sur \mathbb{R} par quotient et pour tout réel x , $k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$. Comme $f' = f$ et $g' = g$, on obtient $k'(x) = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f(x)^2} = 0$. La fonction k est donc constante sur \mathbb{R} , égale à $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$. Finalement on déduit que pour tout réel x , on a $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$, soit $f(x) = g(x)$.

Propriété : On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

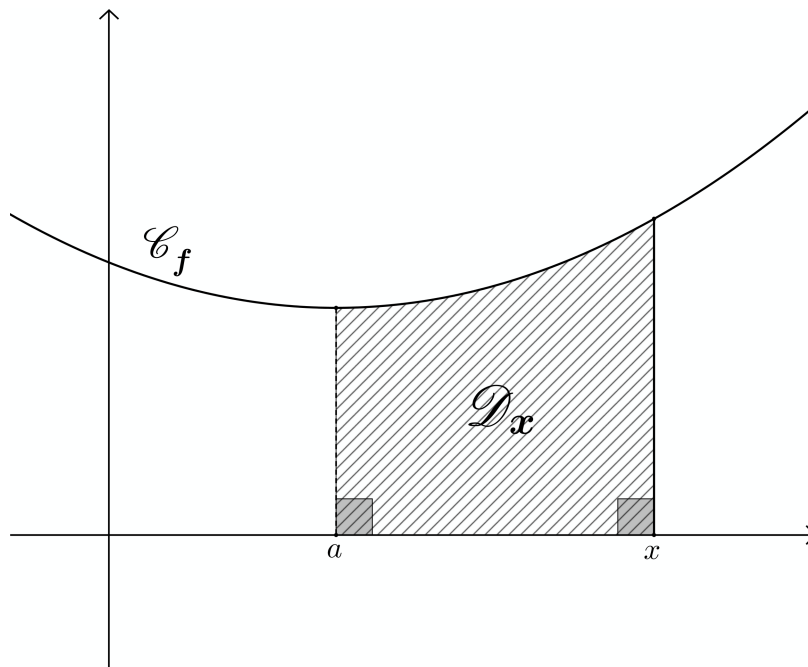
Démonstration : • Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$. Celle-ci est dérivable sur \mathbb{R} par somme et pour tout réel x , $f'(x) = e^x - 1$. Or par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , si $x \geq 0$, alors $e^x \geq e^0 = 1$ et donc $f'(x) \geq 0$. Ainsi f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, ce qui entraîne que pour tout réel $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0)$, soit $e^x - x \geq e^0 - 0$, ou encore $e^x \geq x + 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$, on déduit par comparaison que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

• On a $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$. Or le premier point permet de déduire par quotient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Par composition, on obtient donc finalement $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

III Intégration

Remarque : le théorème qui suit a été démontré en classe dans le cas où $f(x) = x^2$ et $I = [0; +\infty[$.

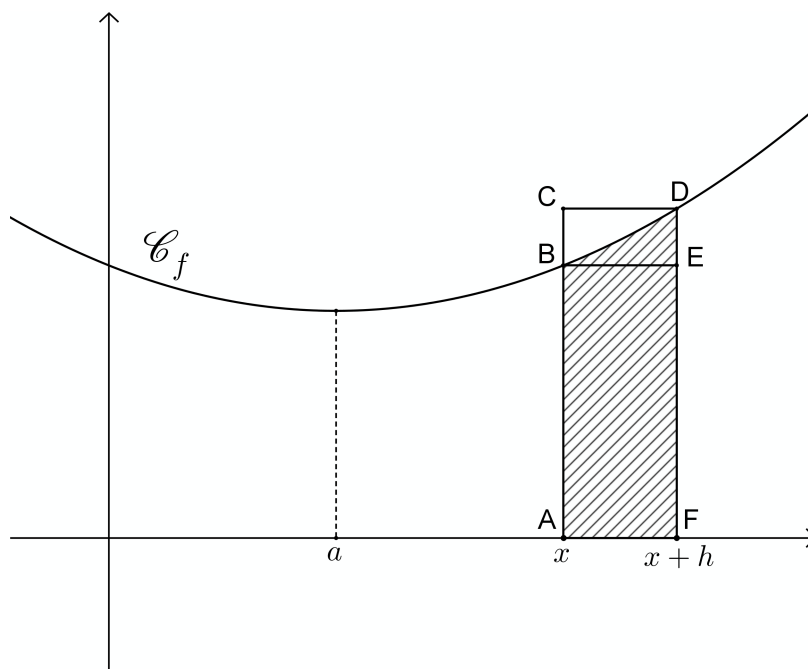
Théorème : On se place dans un repère orthogonal. Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $I = [a; b]$ ($a < b$) ou bien $I = [a; +\infty[$. Si $x \in I$, soit \mathcal{D}_x le domaine du plan (hachuré ci-dessous) sous le graphe de f « entre a et x ». Notons $\mathcal{A}(x)$ l'aire du domaine \mathcal{D}_x en unités d'aire. Alors la fonction \mathcal{A} est la primitive de f sur I qui s'annule en a .



Démonstration : Il est déjà clair que la fonction \mathcal{A} s'annule en a .

Fixons le réel x dans I ; il faut montrer que \mathcal{A} est dérivable en x et que $\mathcal{A}'(x) = f(x)$. Considérons un réel h tel que $x + h \in I$ et notons $A(x; 0)$, $B(x; f(x))$, $C(x; f(x + h))$, $D(x + h; f(x + h))$, $E(x + h; f(x))$ et $F(x + h; 0)$.

- Supposons $h > 0$.



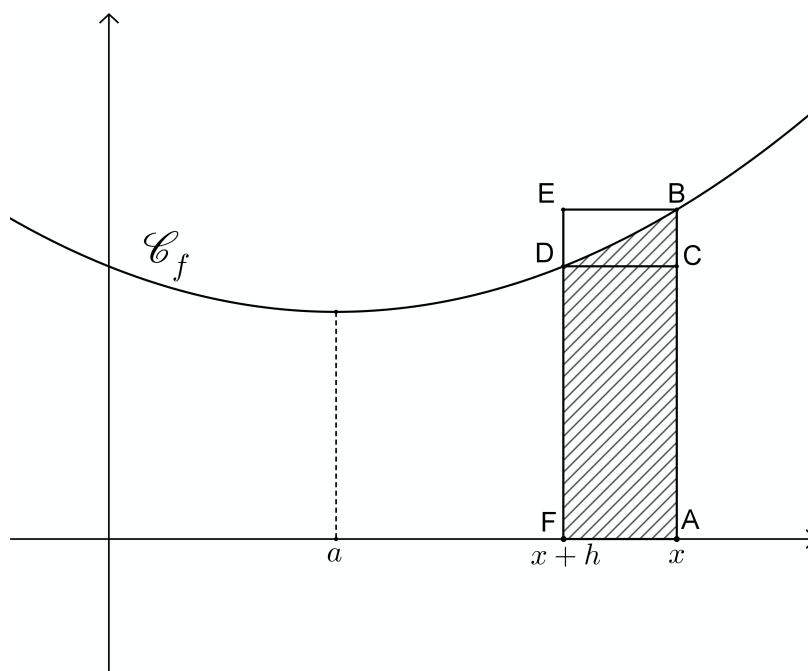
Vu la croissance de f , le domaine $\mathcal{D}_{x+h} \setminus \mathcal{D}_x$ (hachuré ci-dessus) est contenu dans le rectangle ACDF et contient le rectangle ABEF. Par conséquent :

Aire(ABEF) \leq Aire($\mathcal{D}_{x+h} \setminus \mathcal{D}_x$) \leq Aire(ACDF), soit $h f(x) \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq h f(x+h)$, et comme $h > 0$: $f(x) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Comme f est continue, on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

- Supposons $h < 0$.



Vu la croissance de f , le domaine $\mathcal{D}_x \setminus \mathcal{D}_{x+h}$ (hachuré ci-dessus) est contenu dans le rectangle ABEF et contient le rectangle ACDF. Par conséquent :

Aire(ACDF) \leq Aire($\mathcal{D}_x \setminus \mathcal{D}_{x+h}$) \leq Aire(ABEF). Notons que comme $h < 0$, on a $AF = -h$, donc : $-h f(x+h) \leq \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq -h f(x)$, d'où : $f(x+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h)}{-h} \leq f(x)$ (car

$h < 0$), ou encore $f(x+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x)$.

Comme f est continue, on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

• On a donc prouvé que les limites $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h}$ existent et sont toutes les deux égales à $f(x)$. Cela entraîne que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$: la fonction \mathcal{A} est donc dérivable en x et $\mathcal{A}'(x) = f(x)$.

IV Géométrie dans l'espace

Théorème du toit : Soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans sécants de droite d'intersection Δ . Si d et d' sont deux droites parallèles et respectivement incluses dans \mathcal{P} et dans \mathcal{P}' , alors d et d' sont parallèles à Δ .

Démonstration : Soit \vec{u} un vecteur directeur de d (et donc de d') et \vec{v} un vecteur directeur de Δ . Raisonnons par l'absurde en supposant que d et Δ ne soient pas parallèles ; les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont donc pas colinéaires. Or, d'une part $d \subset \mathcal{P}$, $d' \subset \mathcal{P}'$ et \vec{u} dirige d et d' , donc \vec{u} est un vecteur des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' . Et d'autre part $\Delta \subset \mathcal{P}$, $\Delta \subset \mathcal{P}'$ et \vec{v} dirige Δ donc \vec{v} est aussi un vecteur des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' . On en déduit que (\vec{u}, \vec{v}) est à la fois une base^(*) du plan \mathcal{P} et du plan \mathcal{P}' , ce qui prouve que $\mathcal{P} // \mathcal{P}'$: contraire à l'hypothèse.

(*) Rappel : une base d'un plan est un couple de vecteurs du plan non colinéaires.

Rappel : une droite de l'espace est dite orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Proposition : La droite Δ est orthogonale au plan \mathcal{P} si et seulement Δ est orthogonale à deux droites sécantes d et d' incluses dans \mathcal{P} .

Démonstration : • Si la droite Δ est orthogonale au plan \mathcal{P} , alors elle est (par définition) orthogonale à toute droite incluse dans \mathcal{P} . On a donc en particulier $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$.

• Réciproquement, supposons que $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$. Montrons que Δ est orthogonale à une droite quelconque d'' incluse dans \mathcal{P} .

Notons \vec{u} (resp. \vec{v} , \vec{w} , \vec{n}) un vecteur directeur de d (resp. d' , d'' , Δ).

Comme d et d' sont sécantes, \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une base du plan \mathcal{P} . Comme $d'' \subset \mathcal{P}$, les vecteurs \vec{w} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires : il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. On a alors $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \vec{n} \cdot \vec{u} + \beta \vec{n} \cdot \vec{v}$.

Or $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$ donc $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. On en déduit que $\vec{n} \cdot \vec{w} = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$, ce qui prouve que $\Delta \perp d''$.

Propriété : Soit \mathcal{P} le plan passant par le point A et possédant \vec{n} comme vecteur normal. Si M est un point de l'espace, alors : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Démonstration :

- Si $M \in \mathcal{P}$, \overrightarrow{AM} est un vecteur du plan \mathcal{P} donc \vec{n} est orthogonal à \overrightarrow{AM} , d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Réciproquement supposons que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $M \notin \mathcal{P}$. Soit $(\vec{u}; \vec{v})$ une base du plan \mathcal{P} . Comme $M \notin \mathcal{P}$, les vecteurs \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v} ne sont pas coplanaires. Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\vec{n} = \alpha \overrightarrow{AM} + \beta \vec{u} + \gamma \vec{v}$, alors $\vec{n} \cdot \vec{n} = \alpha \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} + \beta \vec{u} \cdot \vec{n} + \gamma \vec{v} \cdot \vec{n}$ et comme $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, on obtient $\|\vec{n}\|^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = 0$, soit $\vec{n} = \vec{0}$, ce qui contredit le fait que \vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{P} .

Conséquence : On se place dans un repère orthonormal. Un plan \mathcal{P} de l'espace possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Démonstration : Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de \mathcal{P} et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal de \mathcal{P} .

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. On a $\overrightarrow{AM}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

D'après la propriété précédente, on a : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - x_0) \times a + (y - y_0) \times b + (z - z_0) \times c = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad \text{en posant } d = -ax_0 - by_0 - cz_0.$$

V Probabilités

Propriété : Si A et B sont deux événements indépendants, alors il en est de même des événements \overline{A} et B .

Démonstration : A et B sont deux événements indépendants donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$, d'où :

$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = p(B) - p(A)p(B) = [1 - p(A)]p(B)$, ou encore $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A})p(B)$, ce qui prouve que les événements \overline{A} et B sont indépendants.

Propriété : Une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ est *sans mémoire* (on dit aussi *sans vieillissement*), c'est-à-dire que pour tous réels positifs s et h , on a :

$$p_{(X \geq s)}(X \geq s + h) = p(X \geq h).$$

Démonstration : Si A et B sont deux événements (avec $p(B) \neq 0$), on a $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Par conséquent : $p_{(X \geq s)}(X \geq s+h) = \frac{p[(X \geq s) \cap (X \geq s+h)]}{p(X \geq s)}$.

Or comme $h \geq 0$, on a $(X \geq s) \cap (X \geq s+h) = (X \geq s+h)$, d'où :

$$p_{(X \geq s)}(X \geq s+h) = \frac{p(X \geq s+h)}{p(X \geq s)} = \frac{e^{-\lambda(s+h)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda(s+h)+\lambda s} = e^{-\lambda h} = p(X \geq h).$$

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, est :

$$E(X) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 x f(x) dx + \lim_{v \rightarrow +\infty} \int_0^v x f(x) dx \quad (\text{où } f \text{ est la densité } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}).$$

Propriété (espérance) : Si la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, alors $E(X) = 0$.

Démonstration : Une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto x f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ donc

$$\int_u^0 x f(x) dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_u^0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}.$$

Or $\lim_{u \rightarrow -\infty} (-\frac{1}{2}u^2) = -\infty$ et par produit et somme $\lim_{w \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^w \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc par composition $\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

D'autre part, $\int_0^v x f(x) dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Or $\lim_{v \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}v^2) = -\infty$ et par produit et somme $\lim_{w \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^w + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc par composition $\lim_{v \rightarrow +\infty} \int_0^v x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On en déduit que $E(X) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$.

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, alors pour tout réel α dans $]0; 1[$, il existe un unique réel strictement positif, noté u_α , tel que $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Démonstration : Notons $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ la fonction de densité associée à la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et pour $u \geq 0$, $G(u) = p(-u \leq X \leq u) = \int_{-u}^u f(x) dx$.

On a $G(u) = 2 \times p(0 \leq X \leq u) = 2 \int_0^u f(x) dx$, donc G est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $u \geq 0$, $G'(u) = 2f(u) > 0$. D'autre part $\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(x) dx = 1$. On en déduit que :

u	0	$+\infty$
$G'(u)$	+	
G	0	1

G est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; $G(0) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) = 1$. Comme $1 - \alpha \in]0; 1[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires entraîne l'existence d'un unique réel u_α dans $]0; +\infty[$ tel que $G(u_\alpha) = 1 - \alpha$, c'est-à-dire tel que $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Théorème : Soit $p \in]0; 1[$ et pour tout $n \geq 2$, X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Soit $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$, où u_α est l'unique réel strictement positif tel que $p(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} p\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha.$$

Démonstration : $\frac{X_n}{n} \in I_n \Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$
 $\Leftrightarrow np - u_\alpha n \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq X_n \leq np + u_\alpha n \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \quad (\text{car } n > 0)$
 $\Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$
 $\Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$
 $\Leftrightarrow -u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha$, où $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est la variable centrée-réduite de X_n .

On a donc $p\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = p(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha)$.

Or d'après le théorème de Moivre-Laplace, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = p(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha)$, où Z est une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$.