TS - Correction de l'exercice n° : 27 p 342

a) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DF}\cdot(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EP}) = \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EP} = (\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HF})\cdot\overrightarrow{ME} + (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{EP}$, d'où

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{MP} = \underbrace{\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{ME}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{ME}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EP}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EP}}_{0} = 0$; en effet, on a :

$(HF)\perp(ME)$ et $(AF)\perp(EP)$ car les diagonales d'un carré sont orthogonales et

$(DH)\perp(ME)$, vu que $(DH)\perp(EGH)$ et $(ME)\subset(EGH)$,

$(DA)\perp(EP)$, vu que $(DA)\perp(ABE)$ et $(EP)\subset(ABE)$.

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}$

D'autre part, $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{DF}\cdot(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EP}) = \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EP} = (\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HF})\cdot\overrightarrow{GE} + (\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF})\cdot\overrightarrow{EP}$,

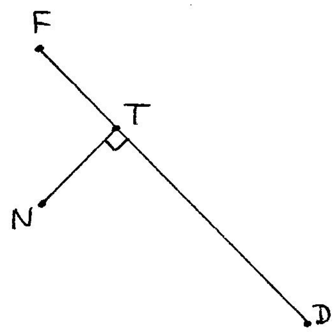
d'où $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{GP} = \underbrace{\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{GE}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{GE}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EP}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{EP}}_{0} = 0$; en effet, on a :

$(HF)\perp(GE)$ et $(AF)\perp(EP)$ car dans un carré, les diagonales sont orthogonales,

$(DH)\perp(GE)$, vu que $(DH)\perp(EGH)$ et $(GE)\subset(EGH)$,

$(GF)\perp(EP)$, vu que $(GF)\perp(FEB)$ et $(EP)\subset(FEB)$.

b) D'après ce qui précède, on a $(DF)\perp(MP)$ et $(DF)\perp(GP)$ donc (DF) est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans (MPG), ce qui prouve que $(DF)\perp(MPG)$.
Or les points M, P, G et N sont coplanaires (ils sont sur le plan (EBG)) donc $(MPG)=(MPN)$ et finalement $(DF)\perp(MPN)$.



c) On a $(DF)\perp(MNP)$ et $(NT)\subset(MNP)$ donc $(DF)\perp(NT)$.
Comme $T\in(DF)$, cela prouve bien que T est le projeté orthogonal de N sur (DF).

d) • D'une part, on a $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DF} = DT\times DF$ (voir figure ci-contre).

• D'autre part, $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DF} = (\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN})\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})$, soit

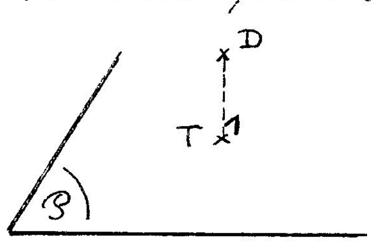
$\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC}^2 + \underbrace{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CF}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{DC}}_{0} + \overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CF} = a^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}\times\overrightarrow{CF} = a^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}^2$,

et finalement $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{CF} = a^2+\frac{1}{2}CF^2 = a^2+\frac{1}{2}\times 2a^2 = 2a^2$.

• D'après le théorème de Pythagore, appliqué dans le triangle FBD, rectangle en B, on a $FD^2 = FB^2 + BD^2 = a^2+2a^2 = 3a^2$, d'où $FD = a\sqrt{3}$.

Comme $DT\times DF = 2a^2$, on obtient $DT = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Remarque :



La distance d'un point D à un plan $\mathcal{P}$ est la distance DT, où T est le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$.