EXERCICE 1 (5 points)

1. $I\left(0;\dfrac{1}{2},1\right)$ et $J\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$.

2. (a) $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ ont des coordonnées non proportionnelles $\left(\dfrac{0}{-1}\neq\dfrac{1}{1}\right)$ donc sont non colinéaires et forment un couple de vecteurs directeurs du plan (BGI).

   De plus $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0 - 2\times 1 + 2\times 1 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BI} = 1\times -1 - 2\times\dfrac{1}{2} + 2\times 1 = 0$

   Donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   (b) Comme $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI) alors (BGI) a une équation de la forme $x-2y+2z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
   Or $B\in(BGI)$ donc $x_B - 2y_B + 2z_B + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$
   Donc le plan (BGI) a pour équation cartésienne $x-2y+2z-1=0$.

   (c) $H(0;1;1)$ et $J\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$ donc K, milieu du segment $[HJ]$, a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

   $x_K - 2y_K + 2z_K - 1 = \dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{3}{2} - 1 = 0$ donc le point K appartient au plan (BGI).

3. (a) Le triangle FIG est isocèle de sommet principal I. Sa hauteur issue de I vaut 1 et sa base FG vaut 1. Donc son aire est égale à $\dfrac{1\times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

   Le volume du tétraèdre $BFIG$ est $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\times\text{Aire}(FIG)\times BF = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{6}$

   (b) Comme Δ est orthogonal au plan (BGI) alors $\overrightarrow{n}$, vecteur normal au plan (BGI), est un vecteur directeur de la droite Δ. De plus $F(1;0;1)\in\Delta$ donc Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

   (c)
$$\begin{aligned}
F'(x\ ;\ y\ ;\ z) \text{ appartient à } (\Delta) \text{ et } (BGI) \quad &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \\ x-2y+2z-1=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \\ 1+t+4t+2+4t-1=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = \dfrac{7}{9} \\ y = \dfrac{4}{9} \\ z = \dfrac{5}{9} \\ t = -\dfrac{2}{9} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc $F'\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{4}{9};\dfrac{5}{9}\right)$.

   (d) $FF' = \sqrt{\left(\dfrac{7}{9}-1\right)^2 + \left(\dfrac{4}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{9}-1\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

   Le volume du tétraèdre $BFIG$ est $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\times\text{Aire}(BGI)\times FF' \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}\times\text{Aire}(BGI)\times\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \text{Aire}(BGI) = \dfrac{3}{4}$.

   Donc l'aire de BGI est égale à $\dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 2

(5 points)

1. Dans $\mathbb{C}$: $(z^2-2z+4)(z^2+4)=0$ $(\star)$

   $(\star) \Leftrightarrow z^2-2z+4=0$ $(\Delta=-12$ ou $z^2+4=0$

   $(\star) \Leftrightarrow z=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=-2\mathrm{i}$ ou $z=2\mathrm{i}$.

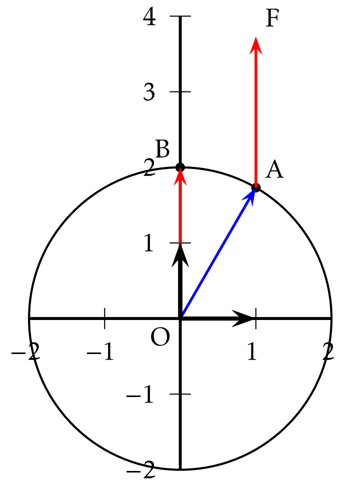
   $S=\left\{1+\mathrm{i}\sqrt{3};+\mathrm{i}\sqrt{3};-2\mathrm{i};2\mathrm{i}\right\}$.

2. (a) $z_A=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   $z_B=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

   $OA=|z_A|=2$ et $OB=|z_B|=2$ donc les points A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

   (b) Figure :



   (c) $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)$.

   Or $\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

3. (a) $z_F=z_A+z_B$ donc $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc, d'après la règle du parallélogramme, $OAFB$ est un parallélogramme. Or $OA=OB$ donc $OAFB$ est un losange.

   (b) On a alors $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)=\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

   De plus, d'après la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OF}\right)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

   (c) On a $z_F=z_A+z_B=1+\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}=1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+2\right)$.

   Donc $|z_F|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}+2\right)^2}=\sqrt{1+3+4+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

   $\arg(z_F)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OF}\right)=\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$, donc l'écriture trigonométrique de z_F est :

   $z_F=2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

   (d) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\mathfrak{Re}(z_F)}{|z_F|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times\sqrt{((4-3))}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

4. Ces deux nombres sont positifs ($\sqrt{6}>\sqrt{2}$) ; comparons leurs carrés :

   - $\left[\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$;
   - $\left[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2=\dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{16}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}=\dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{16}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

   Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux ; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1. (a) $\varphi(1) = 0$

   $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\ln x = -\infty$ donc, par limite de somme, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = -\infty$.

   (b) φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$.

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   Comme φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\varphi(1) = 0$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\varphi(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

2. (a) Par limite de somme, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x-2-3\ln x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x = 0^+$ donc, par limite de quotient, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = x - 2 - \dfrac{2}{x} - 3\times\dfrac{\ln x}{x}$.

   $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-2-\dfrac{2}{x}\right) = +\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc, par limite de produit et somme, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\left(2x-2-\dfrac{3}{x}\right)x - (x^2-2x-2-3\ln x)}{x^2} = \dfrac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2-1+3\ln x}{x^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.

   On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	α	1	β	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\|\|$ $+\infty$	0 ↘	-3	↗ 0	$+\infty$

   (c) Sur $]0;1]$, f est continue car dérivable et strictement décroissante, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = -3$. or $0 \in [-3;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée sur α sur $]0;1]$.

   D'après la calculatrice, $f(0{,}41) \approx 0{,}056$ et $f(0{,}42) \approx -0{,}15$. On a $f(0{,}41) > f(\alpha) > f(0{,}42)$ donc, par stricte décroissance de f sur $]0;1]$, $0{,}41 < \alpha < 0{,}42$ donc $\alpha \approx 0{,}41$.

   (d) F est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

   $\forall x \in]0;+\infty[,\ F'(x) = x - 2 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\times 2\times\dfrac{1}{x}\ln x = \dfrac{x^2-2x-2-3\ln x}{x} = f(x)$.

   Donc F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{A}$, l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$.

Comme f est continue et négative sur $[\alpha;\beta]$ $(\alpha < \beta)$ alors $\mathscr{A} = -\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = -F(\beta) + F(\alpha) \approx 5{,}6$ unités d'aires.

Or 1 unité d'aire = 2 cm^2 donc $\mathscr{A} = 11{,}2$ cm^2.
Par symétrie, l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes C et C' est $2\mathscr{A} = 22{,}4$ cm^2.

L'épaisseur d'un palet doit être de 0,5 cm donc le volume d'un palet est d'environ $22,4 \times 0,5 = 11,2$ cm^3.
Le volume de 80 palets est donc d'environ 896 cm^3 soit 0,896 litre.
La chocolaterie peut donc fabriquer 80 palets avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.
La contrainte de rentabilité est donc respectée.

EXERCICE 4 (OBLIGATOIRE) (5 points)

Partie A : Conjecture

1. $u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times 2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

   $u_2 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$

2. $u_3 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{23}{8}\right)^2 + 3 \times \frac{23}{8} - \frac{3}{2} = \frac{383}{128} \approx 2,99219$

   $u_4 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{383}{128}\right)^2 + 3 \times \frac{383}{128} - \frac{3}{2} = \frac{98303}{32768} \approx 2,99997$

3. La suite (u_n) semble croissante et converger vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

1. Pour tout entier naturel n,
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2 = -\frac{1}{2}v_n^2$.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition : « $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ ».

   `Initialisation` : $v_0 = u_0 - 3 = -1$ donc $-1 \leq v_0 \leq 0$ donc $P(0)$ est vraie.

   `Hérédité` : On suppose $P(n)$ vraie pour un $\mathbb{N}$ fixé.

   Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$.

   D'après l'hypothèse de récurrence, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc, par stricte décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$, on a $1 \geq (v_n)^2 \geq 0$ donc, en multipliant par $-\frac{1}{2} < 0$, on a $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}(v_n)^2 \leq 0$ c'est à dire $-1 \leq -\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq 0$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   `Conclusion` : La proposition $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, on a :

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3. (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}(v_n)^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   (b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   Étudions le signe de chacun des facteurs :
   Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $1 \geq -v_n \geq 0$.
   Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$ donc $\frac{1}{2}v_n + 1 \geq 0$.
   On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ (produit de deux nombres positifs)
   Donc la suite (v_n) est croissante.

4. On a montré dans les questions précédentes que la suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, on peut en déduire que la suite (v_n) converge.

5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).

   Pour tout entier naturel n, $-1 \leq v_n \leq 0$ donc, par passage à la limite, on a $-1 \leq \ell \leq 0$ donc ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.

   D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \ell$.

   D'autre part, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_n)^2$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ donc, par limite de produit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = -\frac{1}{2}\ell^2$.

   Donc, par unicité de la limite $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

   Dans $[-1 ; 0]$,

$$\begin{aligned}\ell = -\frac{1}{2}\ell^2 \quad &\Leftrightarrow \ell + \frac{1}{2}\ell^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \ell\left(1+\frac{1}{2}\ell\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } 1+\frac{1}{2}\ell = 0\\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = -2\end{aligned}$$

Or $-2 \notin [-1\ ;\ 0]$ donc $\ell = 0$.

6. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3$.
   Comme la suite (v_n) est croissante alors, la suite (u_n) est également croissante. (En effet, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$ qui est positif)
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors par limite de somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
   Donc les conjectures faites dans la **partie A** sont validées.

Partie C : Algorithme

Compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $v_n \geqslant -0{,}01$.

```
n ← 0
v ← −1
Tant que v < −0,01
    n ← n + 1
    v ← −(1/2)v²
Fin Tant que
Afficher n
```

EXERCICE 4 (SPÉCIALITÉ) (5 points)

Partie A

1. D'après l'énoncé, on peut dire que, pour tout n : $\begin{cases} a_{n+1} = 20\% \text{ de } a_n + 10\% \text{ de } b_n \\ b_{n+1} = 60\% \text{ de } a_n + 30\% \text{ de } b_n\end{cases}$

   soit $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}2\,a_n + 0{,}1\,b_n \\ b_{n+1} = 0{,}6\,a_n + 0{,}3\,b_n\end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}$

   $\iff U_{n+1} = M \times U_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix}$.

2. $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50\\ 60\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2\times 50 + 0{,}1\times 60\\ 0{,}6\times 50 + 0{,}3\times 60\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16\\ 48\end{pmatrix}$

   $U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16\\ 48\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2\times 16 + 0{,}1\times 48\\ 0{,}6\times 16 + 0{,}3\times 48\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\ 24\end{pmatrix}$

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve successivement :
   $U_3 = M \times U_2 = \begin{pmatrix} 4\\ 12\end{pmatrix}$, $U_4 = M \times U_3 = \begin{pmatrix} 2\\ 6\end{pmatrix}$ et $U_5 = M \times U_4 = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{1}}\\ 3\end{pmatrix}$.
   C'est donc au bout de 5 heures qu'il ne reste qu'un seul vélo dans la station A.

4. • Initialisation : on a $\dfrac{1}{2^{1-1}}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix} = M = M^1$ donc la proposition est vrai au rang 1.

   • Hérédité : supposons la proposition vraie au rang $n \geqslant 1$; on a $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix}$.

   Par conséquent, $M^{n+1} = M^n \times M = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}3\end{pmatrix}$, soit

   $M^{n+1} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0{,}2\times 0{,}2 + 0{,}1\times 0{,}6 & 0{,}2\times 0{,}1 + 0{,}1\times 0{,}3\\ 0{,}6\times 0{,}2 + 0{,}3\times 0{,}6 & 0{,}6\times 0{,}1 + 0{,}3\times 0{,}3\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}05\\ 0{,}3 & 0{,}15\end{pmatrix}$,

d'où $M^{n+1} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 0{,}2 & \frac{1}{2} \times 0{,}1 \\ \frac{1}{2} \times 0{,}6 & \frac{1}{2} \times 0{,}3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \times \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{(n+1)-1}} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$,
ce qui prouve que la proposition est vraie au rang $n+1$.

Partie B

1. (a) $V = M \times V + R \iff V - M \times V = R \iff I \times V - M \times V = R \iff (I - M) \times V = R \iff N \times V = R$.

   (b) $N \times V = R \iff \underbrace{N^{-1} \times N}_{I_2} \times V = N^{-1} \times R \iff V = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}2 \\ 1{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$

   $\iff V = \begin{pmatrix} 1{,}4 \times 30 + 0{,}2 \times 10 \\ 1{,}2 \times 30 + 1{,}6 \times 10 \end{pmatrix} \iff V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$.

2. (a) $W_{n+1} = V_{n+1} - V$; or $V_{n+1} = M \times V_n + R$ et $V = M \times V + R$ donc, pour tout entier n,
   $W_{n+1} = M \times V_n + R - (M \times V + R) = M \times V_n + R - M \times V - R = M \times (V_n - V) = M \times W_n$

   (b) $W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

   Pour tout n, $W_n = M^n \times W_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, donc pour tout $n \geqslant 1$, $W_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0{,}2 \times 6 + 0{,}1 \times 8 \\ 0{,}6 \times 6 + 0{,}3 \times 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   Comme $W_n = V_n - V$, on a $V_n = W_n + V$. D'où pour $n \geqslant 1$, $V_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$,

   soit $V_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{2^{n-1}} + 44 \\ \frac{6}{2^{n-1}} + 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} + 44 \\ \frac{12}{2^n} + 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 0{,}5^n + 44 \\ 12 \times 0{,}5^n + 52 \end{pmatrix}$.

   (c) D'après la question précédente, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\alpha_n = 4 \times 0{,}5^n + 44$ et $\beta_n = 12 \times 0{,}5^n + 52$ donc comme $0{,}5 \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ et par produit et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 4 \times 0 + 44 = 44$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 12 \times 0 + 52 = 52$.
   Ainsi, au bout d'un temps très grand, le nombre de vélos va se stabiliser à 44 dans la station A et à 52 dans la station B.