Contrôle de Mathématiques

I Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^{-x} + x^2}$.

1) **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

En déduire la limite de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de ψ en $+\infty$.

2) **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{\psi(-x)}$.

b) Déterminer la limite de ψ en $-\infty$.

II Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1) Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Déterminer un encadrement au millième de a.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) Étude de la fonction f

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

3) Algorithme

On donne l'algorithme ci-dessous :

```
u ⟵ 0
v ⟵ 1
Tant que v − u > 0,1  faire
    w ⟵ (u + v)/2
    Si g(u) × g(w) ⩾ 0 alors
        u ⟵ w
    Sinon
        v ⟵ w
    Fin Si/Sinon
Fin Tant que
```

☞

a) Compléter le tableau suivant, qui décrit le fonctionnement de l'algorithme.

Étape	w	$g(u)^{\star}$	$g(w)^{\star}$	Test $g(u) \times g(w) \geqslant 0$?	u	v	Test $v - u > 0,1$?
Initialisation	///////	///////	///////	///////			oui
Étape 1							
Étape 2							
Étape 3							
....							
....							

$^{(\star)}$ Arrondir $g(u)$ et $g(w)$ à 10^{-2} près.

b) Donner la finalité de cet algorithme, et interpréter les valeurs de u et v en sortie.