Correction du contrôle de Mathématiques

I

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\times\frac{x}{2}}}{4 \times \frac{x^2}{4}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$, d'où l'égalité souhaitée.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$ et finalement par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = +\infty$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$.

   (b) Si $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\psi(x) = \dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}+1}{\dfrac{1}{x^2\mathrm{e}^x}+1}$. D'après la question précédente, on a par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}+1\right) = +\infty$. D'autre part, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par quotient et somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2\mathrm{e}^x}+1\right) = 0+1 = 1$. Finalement, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x) = +\infty$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$; on a $\psi(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+(-x)^2}{\mathrm{e}^{-(-x)}+(-x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+x^2}{\mathrm{e}^x+x^2}$, d'où $\dfrac{1}{\psi(-x)} = \psi(x)$.

   (b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x) = +\infty$ (voir 1.b.) donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}\psi(-x) = +\infty$. Finalement, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\psi(-x)} = 0^+$, soit $\lim\limits_{x\to-\infty}\psi(x) = 0^+$.

II

1. (a) g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par produit et somme.

   $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[,\ g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x = \left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^x$.

   $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[,\ \left(x^2+2x\right) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$ ($g'(x)$ ne s'annule qu'en 0).

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$ donc par produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   $g(0) = -1$

x	0		α		$+\infty$
signe de $g'(x)$	0		$+$		
variations de g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, $g(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc $0 \in \left[g(0); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$ et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   $g(0,703) \approx -1,8 \times 10^{-3}$, $g(a) = 0$ et $g(0,704) \approx 2,048 \times 10^{-3}$.

   On a $g(0,703) < g(a) < g(0,704)$ donc, par stricte croissance de g sur $[0\ ;\ +\infty[$, $0,703 < a < 0,704$.

(c) g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g(a) = 0$ donc :

x	0		a		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

(Voir tableau des variations de g complété.)

2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0\ ,\ x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0\ ,\ x>0} \mathrm{e}^x = 1$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0\ ,\ x>0} f(x) = +\infty$.

(b) f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

(c) $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

x	0		a		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) D'après le tableau de variation, le minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $m = f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$.

Or $g(a) = 0 \Leftrightarrow a^2\,\mathrm{e}^a - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$

Donc le minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

(e) La fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ (somme de deux fonctions notoirement strictement décroissantes sur $]0\ ;\ +\infty[$).

On a $0,703 < a < 0,704$ donc, par stricte décroissance de la fonction h sur $]0\ ;\ +\infty[$, $h(0,704) < m < h(0,703)$.

Or $h(0,704) \approx 3,438$ et $h(0,703) \approx 3,445$ donc $3,43 < m < 3,45$.

3. (a) **Algorithme**

Étape	w	$g(u)$	$g(w)$	$g(u) \times g(w) \geqslant 0$?	u	v	$b - a > 0,1$?
Initialisation	////////	////////	////////	////////	0	1	oui
Étape 1	$0,5$	-1	$-0,59$	oui	$0,5$	1	oui
Étape 2	$0,75$	$-0,59$	$0,19$	non	$0,5$	$0,75$	oui
Étape 3	$0,625$	$-0,59$	$-0,27$	oui	$0,625$	$0,75$	oui
Étape 4	$0,6875$	$-0,27$	$-0,06$	oui	$0,6875$	$0,75$	non

(b) Les valeurs en sorties de u et v sont respectivement $0,6875$ et $0,75$: ce sont les bornes d'un encadrement de a d'amplitude inférieure à $0,1$.