Correction du devoir de Noël

I **1)a)** Selon son reste dans la division euclidienne par 4, un entier x est congru à 0, 1, 2 ou 3 modulo 4. Si $x \equiv 0$ [4], x est divisible par 4 donc est pair, et si $x \equiv 2$ [4], $x - 2$ est divisible par 4, donc $x - 2$ est pair et x aussi. Par conséquent, si x est impair (premier ou non d'ailleurs), on a $x \equiv 1$ [4] ou $x \equiv 3$ [4], c'est-à-dire $x \equiv 1$ [4] ou $x \equiv -1$ [4] (car $3 \equiv -1$ [4]).

1)b) Liste des entiers premiers inférieurs à 100 et congrus à 1 modulo 4 :

$$5,\ 13,\ 17,\ 29,\ 37,\ 41,\ 53,\ 61,\ 73,\ 89 \text{ et } 97.$$

Liste des entiers premiers inférieurs à 100 et congrus à -1 modulo 4 :

$$3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 23,\ 31,\ 43,\ 47,\ 59,\ 67,\ 71,\ 79 \text{ et } 83.$$

2)a) Soit $N > 1$ un entier dont tous les facteurs premiers sont congrus à 1 modulo 4. Décomposons N en produit de facteurs premiers :

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\,,$$

où $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sont des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des entiers naturels non nuls. Par hypothèse, on a pour tout entier $k \in \{1; 2; \cdots; n\}$, $p_k \equiv 1$ [4]. Comme la relation $\equiv$ est compatible avec la multiplication, on obtient $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} \equiv \underbrace{1^{\alpha_1} 1^{\alpha_2} \cdots 1^{\alpha_n}}_{1}$ [4], soit $N \equiv 1$ [4].

2)b) Notons que $A > 1$; comme A est un nombre impair, tous ses facteurs premiers sont impairs. Raisonnons par l'absurde en supposant que A possède un facteur premier p congru à -1 modulo 4 : vu l'hypothèse qui est faite au début de la question 2), on a $p = p_k$ pour un certain $k \in \{1; 2; \cdots; n\}$. Or p_k divise $p_1 p_2 \cdots p_n$, donc comme p_k divise A, il divise aussi $4 \times p_1 p_2 \cdots p_n + (-1) \times A = 1$; cela est absurde car p_k étant premier, il ne peut diviser 1 (dont les seuls diviseurs sont -1 et 1). Par conséquent, d'après 1)a), tous les facteurs premiers de A sont congrus à 1 modulo 4. D'après 2)a), cela prouve que $A \equiv 1$ [4]. Or, on a $A + 1 = 4p_1 p_2 \cdots p_n$ donc 4 divise $A + 1$, d'où $A \equiv -1$ [4]. On en déduit que $1 \equiv -1$ [4], ce qui est absurde.
Ainsi, l'hypothèse qui a été faite au début de la question 2) entraîne un absurdité. Cela prouve qu'il existe un infinité d'entiers premiers congrus à -1 modulo 4.

II Notons $u_1 = 101$, $u_2 = 10101$, $u_3 = 1010101$, $u_4 = 101010101$, $\cdots$
On a $u_1 = 10^0 + 10^2$, $u_2 = 10^0 + 10^2 + 10^4$, $u_3 = 10^0 + 10^2 + 10^4 + 10^6$, $u_4 = 10^0 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + 10^8$ et plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = 10^0 + 10^2 + \cdots + 10^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 10^{2k}\,.$$

Il s'agit de déterminer quels entiers parmi les u_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des entiers premiers.

- Notons que $u_1 = 101$ est premier.
- Soit un entier $n \geqslant 2$; nous allons montrer que u_n est composé (et donc non premier). On a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 100^k = \frac{100^{n+1} - 1}{100 - 1} = \frac{100^{n+1} - 1}{99}\,,$$

soit :

$$u_n = \frac{10^{2(n+1)} - 1}{99} = \frac{\left(10^{n+1}\right)^2 - 1}{99} = \frac{(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)}{99}.$$

– Supposons n impair ; on a $n + 1 = 2m$, avec $m \in \mathbb{N}$. Comme $10^2 \equiv 1$ [99], on a $10^{2m} \equiv 1^m$ [99], soit $10^{n+1} \equiv 1$ [99], ce qui prouve que $d_1 = \dfrac{10^{n+1} - 1}{99}$ est un entier (strictement supérieur à 1 car $n \geqslant 2$, donc $10^{n+1} - 1 \geqslant 10^3 - 1 = 999$, donc $d_1 \geqslant \frac{999}{99} > 1$). Ainsi :

$$u_n = \underbrace{\frac{10^{n+1} - 1}{99}}_{d_1} \times (\underbrace{10^{n+1} + 1}_{d_2}),$$

où d_1 et d_2 sont des entiers strictement supérieurs à 1, ce qui prouve que u_n est composé.

– Supposons n pair ; on a $10 \equiv -1$ [11], donc $10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1}$ [11], soit $10^{n+1} \equiv -1$ [11], car $n + 1$ est impair. Cela prouve que $d_2 = \dfrac{10^{n+1} + 1}{11}$ est un entier (strictement supérieur à 1 car $10^{n+1} + 1 \geqslant 10^3 + 1$, donc $d_2 \geqslant \frac{1001}{11} > 1$). D'autre part, $10 \equiv 1$ [9], donc $10^{n+1} \equiv 1^{n+1}$ [9], soit $10^{n+1} \equiv 1$ [9], ce qui prouve que $d_1 = \dfrac{10^{n+1} - 1}{9}$ est un entier (strictement supérieur à 1 car $10^{n+1} - 1 \geqslant 10^3 - 1$, donc $d_1 \geqslant \frac{999}{9} > 1$). Ainsi :

$$u_n = \underbrace{\frac{10^{n+1} - 1}{9}}_{d_1} \times \underbrace{\frac{10^{n+1} + 1}{11}}_{d_2},$$

où d_1 et d_2 sont deux entiers strictement supérieurs à 1, ce qui prouve que u_n est composé.

• Conclusion : le seul nombre premier dans la liste est 101.