TS Correction de l'exercice n°: 61 p 151

• 1) a) Notons $g(x) = e^x - x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$. On a $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$. On en déduit le tableau des variations de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	1	$\nearrow$

La fonction g possède donc un minimum égal à 1 sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1$, soit $e^x - x \geq 1$ (*)

• 1) b) Par somme, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = 0 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x) = +\infty$ d'où par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}}$; on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et finalement par somme et quotient :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$

• 1) c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et quotient et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2}$,
soit $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \dfrac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$.

• 2) a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et produit et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -1 \times e^x + (2-x)e^x$, soit $\varphi'(x) = (-1 + 2 - x)e^x = (1-x)e^x$. Comme $e^x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $1 - x$, d'où le tableau des variations ci-contre.

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
φ	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$(\varphi(1) = (2-1)e^1 - 1 = e - 1)$

– Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x) = -\infty$ donc comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, on obtient par produit et somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$

– $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2e^x - xe^x - 1$; or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc par produit et somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 2 \times 0 - 0 - 1 = -1$.

• 2) b) φ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty ; 1]$, $\varphi(1) = e - 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$ donc $0 \in \left]\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) ; \varphi(1)\right]$ et d'après le corollaire du T.V.I., l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution α dans $]-\infty ; 1]$.

φ est continue et strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$, $\varphi(1) = e - 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$ donc $0 \in \left]\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) ; \varphi(1)\right[$ et d'après le corollaire du T.V.I., l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution β dans $]1 ; +\infty[$.

Bilan : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$: α et β

(*) Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - x \neq 0$ donc $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ existe pour tout réel x, ce qui prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.

• 2) c) D'après la calculatrice (méthode par balayage) : $-1{,}15 < \alpha < -1{,}14$ et $1{,}84 < \beta < 1{,}85$.

• 2) d) On a $\varphi(\alpha) = 0$ donc $(2-\alpha)e^{\alpha} - 1 = 0$, d'où $e^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

• 3) a) On a pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(e^{x}-x)^2}$ (voir 1.c.) donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$, vu que $(e^{x}-x)^2 > 0$. Grâce au tableau des variations de φ obtenu au 2)a) [et complété], on en déduit :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

• 3) b) On a $f(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha}$ et $e^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$, donc $f(\alpha) = \dfrac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \dfrac{\frac{1-(2-\alpha)}{2-\alpha}}{\frac{1-\alpha(2-\alpha)}{2-\alpha}}$, d'où

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

__Remarque__ : un raisonnement identique prouverait que $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta - 1}$.