Épreuve de Mathématiques

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Février 2018

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8. La page 8 est à rendre, complétée, avec la copie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de la calculatrice en mode examen est autorisée.

Chaque exercice sera traité sur une copie séparée.

Exercice 1 (4 points)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

   On envisage les événements suivants :

   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   (b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

   (c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

   (d) L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   On arrondira à 10^{-3}.

   (c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
   On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 2 (5 points)

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062

...		...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0{,}85u_n + 6$.

1. (a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
   (b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.
4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0{,}85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Quelle valeur affiche-t-il ?

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

   En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
   Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

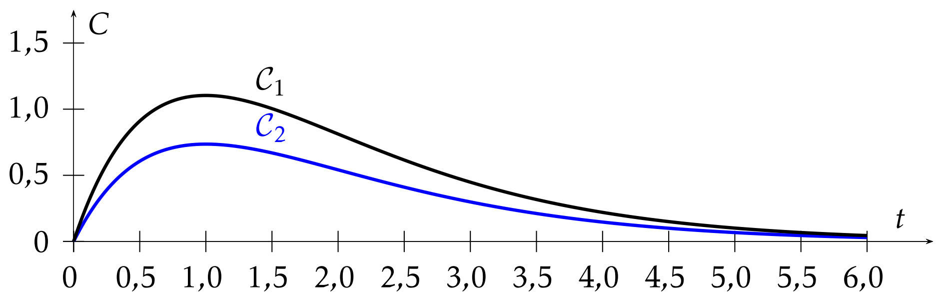
3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   (a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   (b) Sur la figure donnée en annexe page 8, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
   Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   (c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?

Exercice 4 (7 points)

Partie A

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool. C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.

   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = Ate^{-t}$$

   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   (b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 2te^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

   (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

   (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

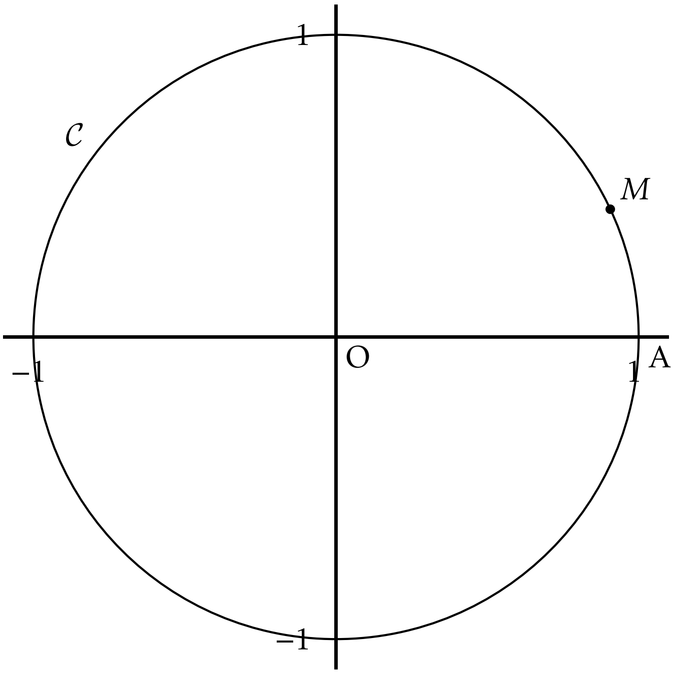
5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.

   Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

6. Déterminer l'instant t auquel la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est maximale.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 3



Numéro d'anonymat : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _