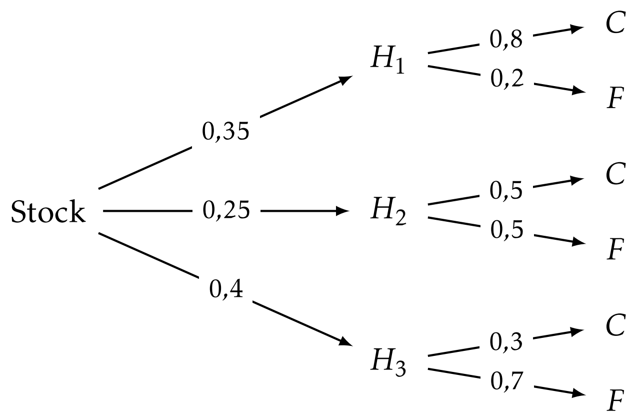
Exercice 1 (4 points)

1. (a) Arbre pondéré traduisant la situation :



(b) $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$
La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est 0,12.

(c) H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C)$
$P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3 \cap C)$
$P(C) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}12$
$P(C) = 0{,}525$

(d) $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} \approx 0{,}533$
La probabilité que l'arbre ait été acheté chez l'horticulteur H_1 sachant que c'est une conifère est 0,533.

2. (a) On répète $n = 10$ fois la même épreuve : choisir un arbre.
Cette épreuve a deux issues :
- le succès : "l'arbre est un conifère" de probabilité $p = 0{,}525$.
- l'échec : "l'arbre est feuillu" de probabilité $1 - p = 0{,}475$

Les épreuves sont indépendantes.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (nombre de conifères) suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}525$.

(b) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0{,}525^5 \times 0{,}475^5 \approx 0{,}243$
La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est 0,243.

(c) Pour que l'échantillon prélevé comporte au moins deux arbres feuillus, il faut qu'il comporte au plus huit conifères.
Or $P(X \leq 8) \approx 0{,}984$ donc la probabilité que l'échantillon prélevé comporte au moins deux arbres feuillus est 0,984.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

1. Pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 120$.
2. Dans la cellule B3, on saisit « =0,9*B2 + 0,05*C2 ».
   Dans la cellule C3, on saisit « =0,1*B2 + 0,95*C2 »
3. D'après les données du tableur, le nombre de ruraux semble tendre vers 40 millions, et le nombre de citadins semble tendre vers 80 millions.

Partie B

1. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition : « $u_n \geq u_{n+1}$ » .
   `Initialisation :` $u_0 = 90$ et $u_1 = 0{,}85 \times 90 + 6 = 82{,}5$ donc $u_0 \geq u_1$ donc $P(0)$ est vraie.
   `Hérédité :` On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $u_{n+1} \geq u_{n+2}$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \geq u_{n+1}$ donc, en multipliant par $0{,}85 > 0$, $085u_n \geq 0{,}85u_{n+1}$ donc, en ajoutant 6, $u_{n+1} \geq u_{n+2}$.
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   `Conclusion :` La proposition $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, elle est vraie pour tout entier naturel n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$
   Donc la suite (u_n) est décroissante.

   (b) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, on en déduit, d'après le théorème de la limite monotone, que la suite (u_n) converge vers un réel L.

2. (a) Pour tout entier entier naturel n, $w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0{,}85u_n - 34 = 0{,}85(u_n - 40) = 0{,}85w_n$
   Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 40 = 50$.

   (b) Pour tout entier entier naturel n, $w_n = w_0 \times q^n = 50 \times 0{,}85^n$ et $u_n = w_n + 40 = 50 \times 0{,}85^n + 40$.

   (c) Pour tout entier naturel n, $v_n = 120 - u_n = 80 - 50 \times 0{,}85^n$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} 50 \times 0{,}85^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}85$ avec $-1 < q < 1$) donc, par limite de somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 80$ ce qui valide les conjectures effectuées à la question A3.

4. (a) Dans cet algorithme, la variable u, initialisée à 90, représente le terme u_n et $120-u$ représente donc v_n.
   On sort de la boucle « tant que » dès que $u < 120 - u$ c'est-à-dire dès que $u_n < v_n$; l'algorithme affiche donc le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n < v_n$.
   Concrètement, l'algorithme affiche au bout de combien d'années la population en ville dépassera la population en zone rurale.

   (b) D'après le tableau de la question A, on en déduit que la valeur affichée est $n = 6$.

Exercice 3 (4 points)

1. $\Delta = -4$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

   $z_1 = \dfrac{-2-2i}{-2} = 1+i$ et $z_2 = 1-i$.

   Donc $S = \{1-i; 1+i\}$.

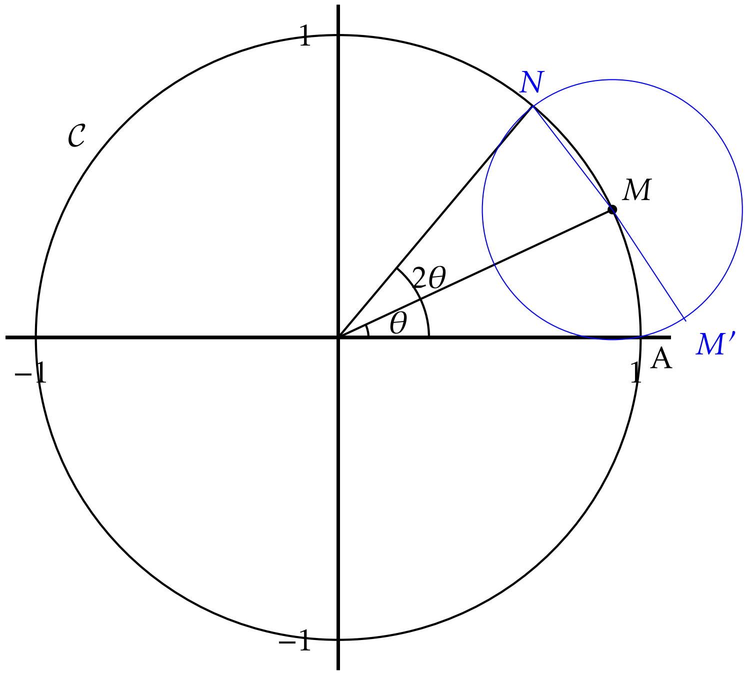
   $z' = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0$

   Les points d'affixe $1-i$ et $1+i$ ont pour image le point d'affixe 2.

2. Le milieu du segment $[NM']$ a pour affixe $\dfrac{z_N + z'}{2} = \dfrac{z^2 - z^2 + 2z}{2} = z$ donc M est le milieu du segment $[NM']$.

3. (a) Comme M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors $|z| = OM = 1$.
   On a alors $|z_N| = |z^2| = |z|^2 = 1^2 = 1$.
   On a $\arg(z_N) = \arg(z^2) = 2\arg(z) = 2\theta[2\pi]$.

   (b) $ON = |z_N| = 1$ donc N est sur le cercle $\mathcal{C}$.
   $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_N) - \arg(z) = \theta[2\pi]$
   Pour placer N, on place le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta[2\pi]$.
   Pour construire M', il suffit ensuite de tracer le symétrique de N par rapport à M.



   (c) On a $MA = |1-z|$ et $MM' = |z' - z| = |-z^2 + z| = |z(1-z)| = |1-z|$ car $|z| = 1$. Donc $MA = MM'$ donc le triangle AMM' est isocèle en M.

Exercice 4 (7 points)

Partie A

1. Graphiquement, comme C est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ alors pour tout réel positif t, $C'(t)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse t. Or c'est au point de coordonnées $(0;0)$ que la tangente aux courbes semble avoir le coefficient directeur le plus élevé.

   Donc la vitesse semble maximale à l'instant $t = 0$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 0 est supérieur au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 0 donc la courbe $\mathcal{C}_1$ correspond à la personne de plus faible corpulence.

   On en déduit que la personne la plus corpulente est P_2.

3. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = A(\mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t}) = A\,\mathrm{e}^{-t}(1-t)$.
   Donc $f'(0) = A$.

   (b) L'affirmation est FAUSSE.
   On a montré que $f'(0) = A$ avec $f'(0)$ la vitesse d'apparition de l'alcool dans l'instant à l'instant 0. Or une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool donc plus A est grand, plus la personne est de faible corpulence.

Partie B - Un cas particulier

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = 2(\mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t}) = 2\,\mathrm{e}^{-t}(1-t)$.
   $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $2\,\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale au bout d'une heure.
   Sa valeur est alors de $\dfrac{2}{e} \approx 0{,}74$ gramme par litre.

3. Pour tout réel t positif $f(t) = 2 \times \dfrac{t}{\mathrm{e}^t}$

   Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$ donc, par limite d'inverse, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ donc, par limite de produit, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

   On en déduit que l'alcool finit par s'éliminer complètement.

4. (a) Sur $[0\,;\,1]$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$. Or $0{,}2 \in \left[0\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}2$ admet une unique solution notée t_1 sur $[0\,;\,1]$.
   De même, on montre que l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une unique solution notée t_2 sur $[1;+\infty[$.
   Donc il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

   (b) Déterminons un encadrement de t_2 à l'aide de la calculatrice.
   $f(3{,}57) \approx 0{,}20103$, $f(t_2) = 0{,}2$ et $f(3{,}58) \approx 0{,}19959$.
   On a $f(3{,}57) > f(t_2) > f(3{,}58)$ donc, par stricte décroissance de f sur $[1;+\infty[$, on a
   $3{,}57 < t_2 < 3{,}58$.
   $0{,}58 \times 60 = 34{,}8$ donc Paul devra attendre au moins 3 heures et 35 minutes avant de pouvoir reprendre le volant en toute légalité.

5. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > T$, $f(t) \in]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$
ici on pose $\epsilon = 5\times 10^{-3}$
Donc il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang.

6. La vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $f'(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t}(1-t)$.
Déterminons en quelle valeur f' atteint son maximum.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = 2(-\mathrm{e}^{-t} - (1-t)\mathrm{e}^{-t}) = 2\,\mathrm{e}^{-t}(t-2)$.
$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $2\,\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $t-2$.
Calcul de la limite de f' en $+\infty$:
$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = 2\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^t} - \dfrac{t}{\mathrm{e}^t}\right)$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ (voir question 3.) donc, par limite de somme et produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = 0$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	2	$\searrow$	$-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	0

Donc f' atteint son maximum en $t = 0$.