Devoir de Mathématiques

À rendre mardi 12 mars

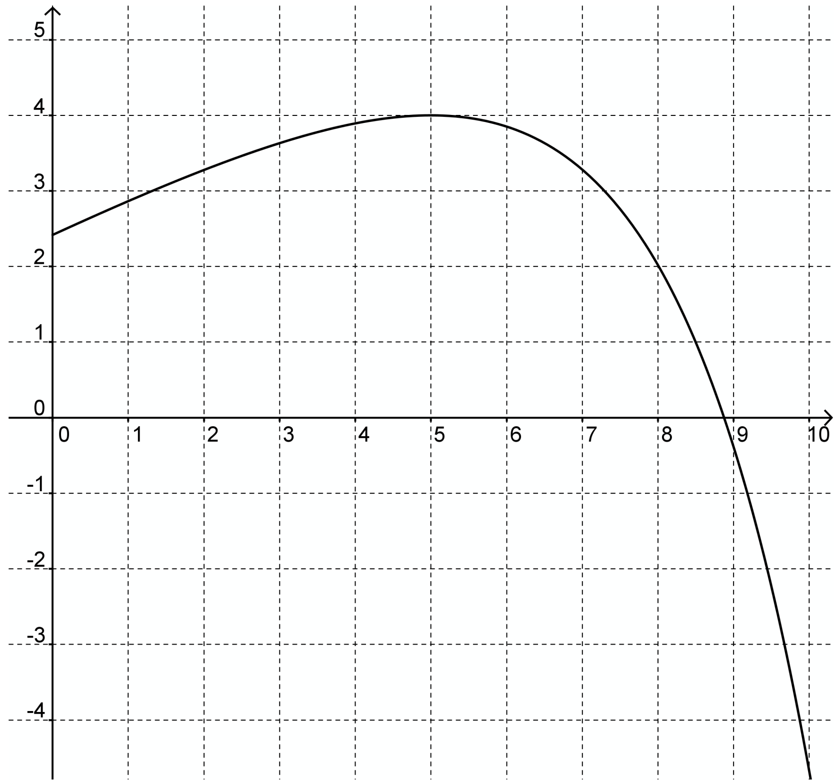
■ Exercice VI du polycopié « Fonctions sin et cos : exercices ».

■ Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 5}{2} - \mathrm{e}^{\frac{u_n - 5}{2}}$.

I Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+5}{2} - \mathrm{e}^{\frac{x-5}{2}}$.

1) Déterminer les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

2) On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction f. L'utiliser pour représenter sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3. Que peut-on conjecturer quant au comportement de la suite (u_n) ?



II Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1) Dresser le tableau des variations de g sur $[0;+\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution β dans $[0;+\infty[$; donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de β.

III **1)** Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$.

2) Prouver que la suite (u_n) converge vers β.