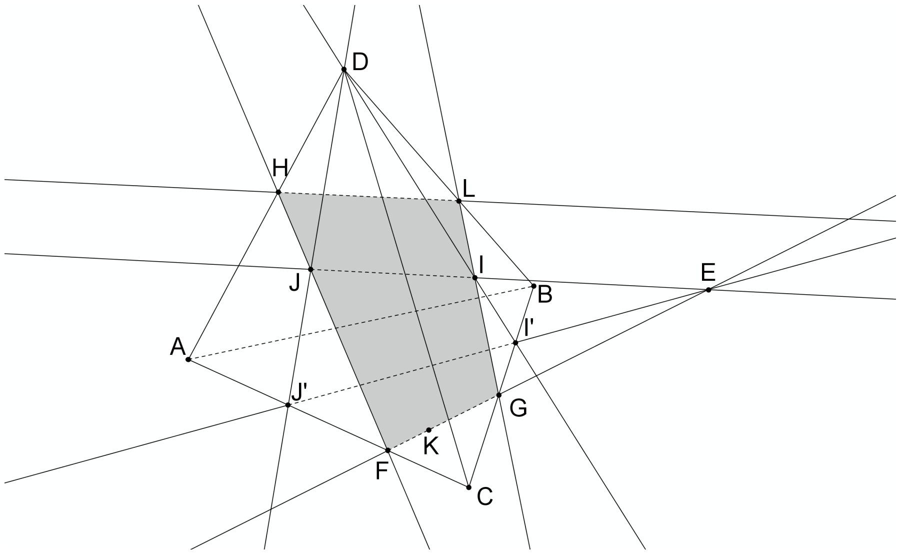
Correction de l'exercice : « Section d'un tétraèdre par un plan »



Il s'agit de déterminer les droites d'intersection de $\mathscr{P}$ avec chacun des plans portant les faces du tétraèdre ABCD.

• $J \in (ACD)$ et $D \in (ACD)$ donc $(DJ) \subset (ACD)$. D'autre part $(AC) \subset (ACD)$ donc les droites (DJ) et (AC) sont coplanaires. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point J'.
On prouve de même que les droites (DI) et (BC) sont sécantes en un point I'.

• $J' \in (DJ)$ et $(DJ) \subset (DIJ)$ donc $J' \in (DIJ)$.
$I' \in (DI)$ et $(DI) \subset (DIJ)$ donc $I' \in (DIJ)$.
On en déduit que $(I'J') \subset (DIJ)$. Comme $(IJ) \subset (DIJ)$, on en déduit que les droites (IJ) et $(I'J')$ sont coplanaires.
Comme $I' \in (BC)$ et $(BC) \subset (ABC)$, on a $I' \in (ABC)$.
De même $J' \in (AC)$ et $(AC) \subset (ABC)$ donc $J' \in (ABC)$.
On a alors $(I'J') \subset (ABC)$ et (IJ) n'est donc pas parallèle à $(I'J')$ car sinon (IJ) serait parallèle à (ABC), ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, (IJ) et $(I'J')$ sont coplanaires et non parallèles, ce qui prouve qu'elles sont sécantes en un point E.

• $E \in (I'J')$ et $(I'J') \subset (ABC)$ donc $E \in (ABC)$.
$E \in (IJ)$ et $(IJ) \subset \mathscr{P}$ donc $E \in \mathscr{P}$.
E et K sont donc deux points distincts appartenant à la fois aux deux plans (sécants) $\mathscr{P}$ et (ABC), ce qui prouve que $\boxed{\mathscr{P} \cap (ABC) = (EK)}$.

• $(EK) \subset (ABC)$ et $(AC) \subset (ABC)$ donc (EK) et (AC) sont deux droites coplanaires. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point F.
De même, (EK) et (BC) sont sécantes en un point G.

• $F \in (AC)$ et $(AC) \subset (ACD)$ donc $F \in (ACD)$.
$F \in (EK)$ et $(EK) \subset \mathscr{P}$ donc $F \in \mathscr{P}$.
Ainsi, F et J sont deux points distincts appartenant à la fois aux deux plans (sécants) $\mathscr{P}$ et (ACD), ce qui prouve que $\boxed{\mathscr{P} \cap (ACD) = (JF)}$.

• On prouve de manière identique que $\boxed{\mathscr{P} \cap (BCD) = (IG)}$.

• (JF) et (AD) sont deux droites coplanaires (incluses dans le plan (ACD)) et non parallèles, elles sont donc sécantes en un point H.
De même (IG) et (BD) sont sécantes en un point L.
• $L \in (IG)$ et $(IG) \subset \mathscr{P}$ donc $L \in \mathscr{P}$.
$L \in (BD)$ et $(BD) \subset (ABD)$ donc $L \in (ABD)$.
$H \in (AD)$ et $(AD) \subset (ABD)$ donc $H \in (ABD)$.
$H \in (JF)$ et $(JF) \subset \mathscr{P}$ donc $H \in \mathscr{P}$.
Ainsi, L et H sont deux points distincts appartenant à la fois aux deux plans (sécants) $\mathscr{P}$ et (ABD), ce qui prouve que $\boxed{\mathscr{P} \cap (ABD) = (HL)}$.