TS (Spécialité)

# Correction de la fin de l'exercice "Un problème d'échange" (d'après Bac S, Amérique du Sud, novembre 2015)

- 5) c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n = 50 \times 0{,}85^n + 40$. Or $0{,}85 \in ]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$.

On en déduit, par produit et somme, que $(r_n)$ converge vers $50 \times 0 + 40 = 40$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n + c_n = 120$, d'où $c_n = 120 - r_n$, ce qui prouve par somme que $(c_n)$ converge vers $120 - 40 = 80$.

Conclusion : la population rurale (resp. citadine) "tend" vers 40 millions d'habitants (resp. 80 millions). La répartition de la population entre les deux catégories s'équilibre en "tendant" vers l'état stable X du système, mis en évidence à la question 1)a).

- 6)a)

```
n ← 0
r ← 90
c ← 30
Tant que c ≤ r, faire:
    n ← n+1
    r ← 50 × 0,85^n + 40
    c ← 120 - r
Fin Tant que
Afficher n
```

- 6)b)

Langage TI

```
0 → N
90 → R
30 → C
While C ≤ R
N+1 → N
50*0.85^N +40 → R
120 - R → C
End
Disp N
```

Langage Python

```
n = 0
r = 90
c = 30
while c<=r:
    n = n+1
    r = 50*0.85**n +40
    c = 120-r
print(n)
```

Le programme fournit la valeur N = 6.

- 6)c) N est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $c_n > r_n$ :

$c_n > r_n \iff 120 - r_n > r_n \iff 2r_n < 120 \iff r_n < 60$, d'où

$c_n > r_n \iff 50 \times 0{,}85^n + 40 < 60 \iff 50 \times 0{,}85^n < 20 \iff 0{,}85^n < 0{,}4$,

donc $c_n > r_n \iff \ln(0{,}85^n) < \ln 0{,}4$ par stricte croissance de ln sur $]0;+\infty[$

$\iff n \ln 0{,}85 < \ln 0{,}4$

$\iff n > \dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}85} \approx 5{,}64$ } on a $0 < 0{,}85 < 1$ donc $\ln 0{,}85 < 0$.

$\iff n \geqslant 6$ (car $n$ est entier).

On retrouve bien la valeur N = 6 précédente.