

1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_{n+1} = -0,1 u_n + 0,8 v_n \\ \text{et} \\ v_{n+1} = -0,4 u_n + 1,1 v_n \end{cases}$$
, ce qui équivaut

a)
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,8 \\ -0,4 & 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
, ou encore à $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,8 \\ -0,4 & 1,1 \end{pmatrix}$.

2) a) La calculatrice permet de vérifier que $PDP^{-1} = A$, où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) b) - Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$\mathcal{P}(n) : A^n = P D^n P^{-1}$$

• On a $P D^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1} = P P^{-1} = I_3 = A^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $A^n = P D^n P^{-1}$ donc $A^{n+1} = \underbrace{A}_{P D^{-1} P^{-1}} \times \underbrace{A^n}_{P D^n P^{-1}} = \underbrace{P D^{-1} P^{-1} P D^n P^{-1}}_{P D I_3 D^n P^{-1}} = P D D^n P^{-1} = P D^{n+1} P^{-1}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A X_n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$, soit $X_n = P D^n P^{-1} X_0$.

3) D étant une matrice diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 0,3^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$ donc

$$P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3^n & -0,3^n \\ -0,7^n & 2 \times 0,7^n \end{pmatrix}, \text{ d'où}$$

$$P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \times 0,3^n - 0,7^n & -2 \times 0,3^n + 2 \times 0,7^n \\ 0,3^n - 0,7^n & -0,3^n + 2 \times 0,7^n \end{pmatrix} \text{ et comme } X_n = P D^n P^{-1} X_0,$$

on obtient $X_n = \begin{pmatrix} 2 \times 0,3^n - 0,7^n & -2 \times 0,3^n + 2 \times 0,7^n \\ 0,3^n - 0,7^n & -0,3^n + 2 \times 0,7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, soit :

$$u_n = 5 \times (2 \times 0,3^n - 0,7^n) + 6 \times (-2 \times 0,3^n + 2 \times 0,7^n) = -2 \times 0,3^n + 7 \times 0,7^n \text{ et}$$

$$v_n = 5 \times (0,3^n - 0,7^n) + 6 \times (-0,3^n + 2 \times 0,7^n) = -0,3^n + 7 \times 0,7^n.$$

Comme $0,3$ et $0,7$ sont dans $]-1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$ donc par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.