Exercice (logarithme, calcul intégral)

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. On note f' la fonction dérivée de f. On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 [f(x) + xf'(x)]\,\mathrm{d}x = f(1)$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme nepérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

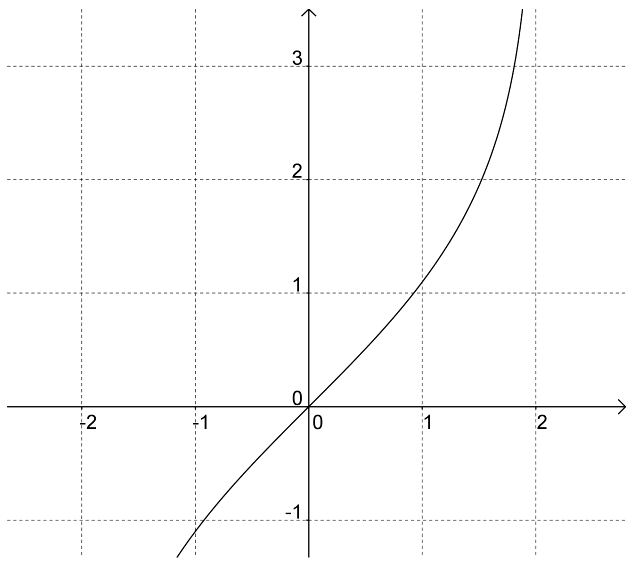
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.

   (b) En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$.

Partie C

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous :



Hachurer sur cette feuille la partie $\mathscr{P}$ du plan constituée des points $M(x\ ;\ y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant \ln 3$. En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de $\mathscr{P}$.