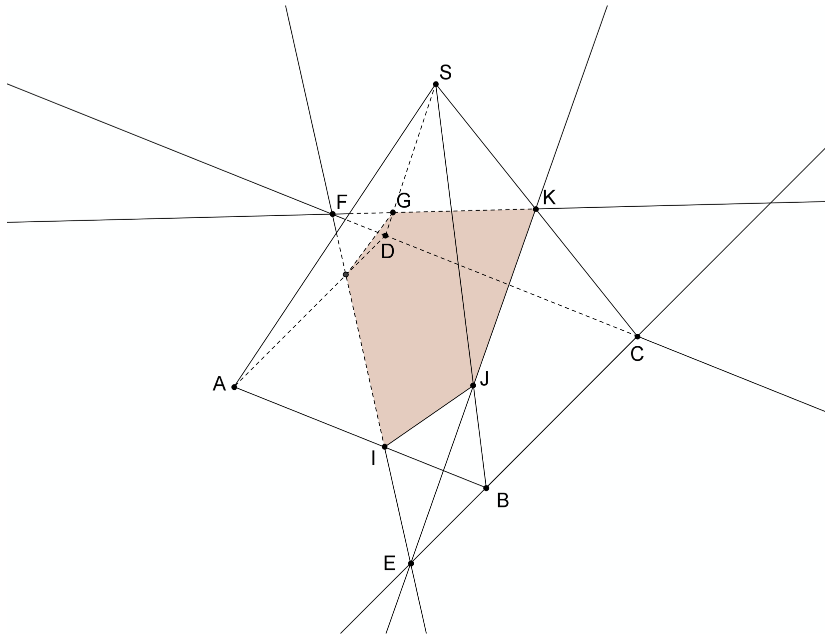
TS

Correction des exercices A et B

A



• On a J $\in$ (SB) et (SB) $\subset$ (SBC) donc J $\in$ (SBC). De même, K $\in$ (SC) et (SC) $\subset$ (SBC) donc K $\in$ (SBC). On en déduit que (JK) $\subset$ (SBC). Ainsi les droites (JK) et (BC) sont coplanaires (incluses dans le plan (SBC)). Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point E.

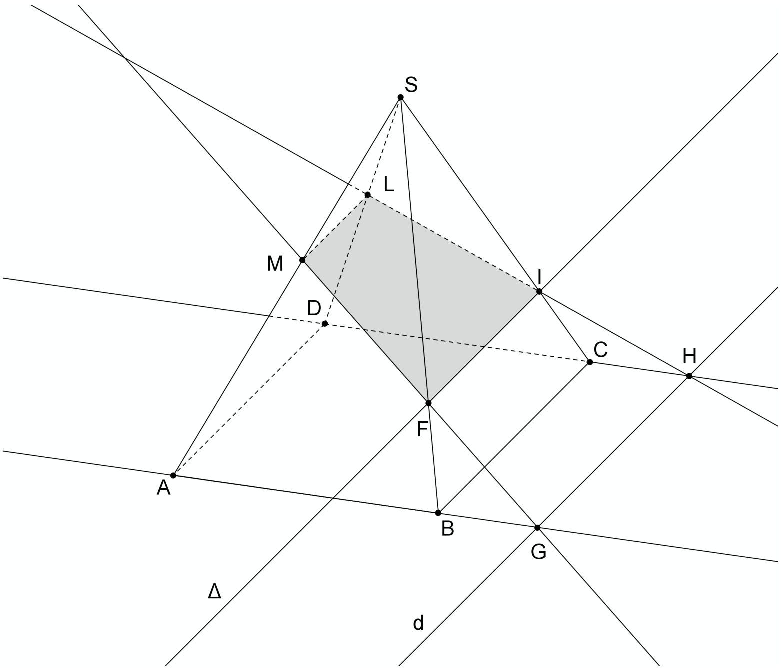
• E $\in$ (JK) et (JK) $\subset$ (IJK) donc E $\in$ (IJK).
E $\in$ (BC) et (BC) $\subset$ (ABC) donc E $\in$ (ABC).
I $\in$ (AB) et (AB) $\subset$ (ABC) donc I $\in$ (ABC).
Ainsi, E et I sont deux points distincts appartenant à la fois aux deux plans (sécants) (IJK) et (ABC), ce qui prouve que $\boxed{\text{(IJK)} \cap \text{(ABC)} = \text{(EI)}}$.

• (CD) et (EI) sont deux droites coplanaires (incluses dans la plan (ABC)=(ADC)). Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point F.

• F $\in$ (CD) et (CD) $\subset$ (SCD) donc F $\in$ (SCD).
K $\in$ (SC) et (SC) $\subset$ (SCD) donc K $\in$ (SCD).
On en déduit que (FK) $\subset$ (SDC). Ainsi les droites (FK) et (SD) sont coplanaires (incluses dans le plan (SDC)). Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point G.

• On a F $\in$ (EI) et (EI) $\subset$ (IJK) donc F $\in$ (IJK). Comme K $\in$ (IJK), on en déduit que (FK) $\subset$ (IJK). Or G $\in$ (FK) donc G $\in$ (IJK). Finalement G appartient à la fois à (IJK) et à (SD), ce qui établit que $\boxed{\text{(IJK)} \cap \text{(SD)} = \{\text{G}\}}$.

B



Il s'agit de déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec chacun des plans portant une des faces de la pyramide SABCD.

• Notons Δ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (SBC). On a (BC) $\subset$ (SBC) et $d \subset \mathscr{P}$ donc comme d//(BC), le théorème du toit assure que Δ // (BC). Or I $\in$ (SC) et (SC) $\subset$ (SBC) donc I appartient à la fois à (SBC) et à $\mathscr{P}$, ce qui prouve qu'il appartient à Δ. Ainsi, Δ est la parallèle à (BC) passant par I.
Les droites Δ et (SB) sont coplanaires (incluses dans (SBC)). Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point F.

• Les droites (AB) et d sont coplanaires (incluses dans (ABC)). Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point G.
G $\in$ (AB) et (AB) $\subset$ (SAB) donc G $\in$ (SAB).
G $\in d$ et $d \subset \mathscr{P}$ donc G $\in \mathscr{P}$.
F $\in$ (SB) et (SB) $\subset$ (SAB) donc F $\in$ (SAB).
F $\in \Delta$ et $\Delta \subset \mathscr{P}$ donc F $\in \mathscr{P}$.
Les points F et G appartiennent donc à la fois aux deux plans (sécants) $\mathscr{P}$ et (SAB), ce qui prouve que $\boxed{\mathscr{P} \cap (\mathrm{SAB}) = (\mathrm{FG})}$.

• Un raisonnement identique prouve que les droites d et (CD) sont sécantes en un point H et que $\boxed{\mathscr{P} \cap (\mathrm{SCD}) = (\mathrm{HI})}$.

• Les droites (FG) et (SA) sont coplanaires (incluses dans le plan (SAB)). Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point M.
On voit de même que les droites (HI) et (SD) sont sécantes en un point L.
M $\in$ (FG) et (FG) $\subset \mathscr{P}$ donc M $\in \mathscr{P}$.
M $\in$ (SA) et (SA) $\subset$ (SAD) donc M $\in$ (SAD).
L $\in$ (HI) et (HI) $\subset \mathscr{P}$ donc L $\in \mathscr{P}$.
L $\in$ (SD) et (SD) $\subset$ (SAD) donc L $\in$ (SAD).
Les points M et L appartiennent donc à la fois aux deux plans (sécants) $\mathscr{P}$ et (SAD), ce qui prouve que $\boxed{\mathscr{P} \cap (\mathrm{SAD}) = (\mathrm{ML})}$.