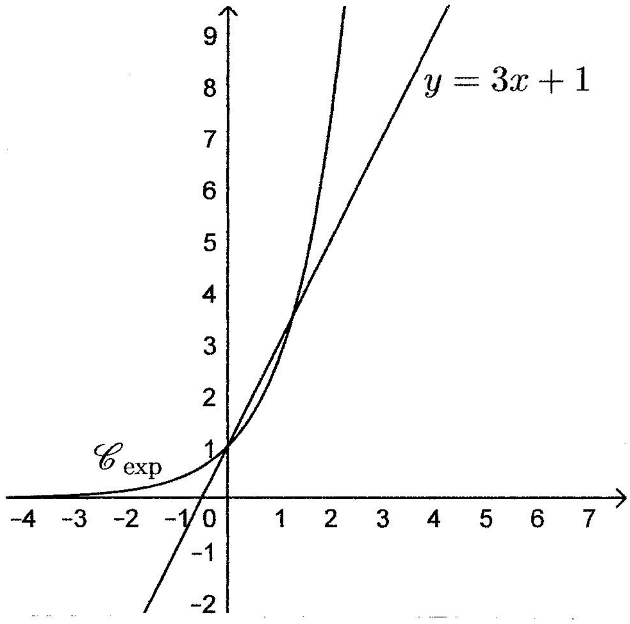
TS Correction de l'exercice "défi" n°: 106 p 233

- Montrons que pour tout $t \in [0;1]$, on a
$$1 \leq e^t \leq 3t+1 \quad (\#).$$



Pour cela, posons $\varphi(t) = e^t - 3t - 1$; pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi'(t) = e^t - 3$. Or par croissance de exp sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel $t \leq 1$, $e^t \leq e^1 = e < 3$, d'où $\varphi'(t) < 0$. La fonction φ est donc décroissante sur $]-\infty;1]$, ce qui prouve que pour tout $t \in [0;1]$, $\varphi(t) \leq \varphi(0)$, soit $e^t - 3t - 1 \leq 0$, ce qui établit (#).

- On déduit de (#) que pour tout $t \in]0;1]$, $\frac{1}{t} \leq f(t) = \frac{e^t}{t} \leq \frac{1}{t} + 3$.

Soit $x \in]0;\frac{1}{2}]$; on a $0 < x \leq 2x \leq 1$ donc par croissance de l'intégrale,
$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}+3\right)dt,$$
$$\text{soit } [\ln t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq [\ln t + 3t]_x^{2x},$$
$$\text{d'où } \ln 2x - \ln x \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \ln 2x + 6x - \ln x - 3x,$$
et finalement, $\ln 2 \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \ln 2 + 3x$.

Comme $\lim_{x \to 0} (\ln 2 + 3x) = \ln 2$, le théorème des gendarmes entraîne que
$$\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} f(t)\,dt = \ln 2$$