TS Correction de l'exercice "Logarithme, calcul intégral".

- Partie A 1) La fonction $x \overset{g}{\mapsto} x f(x)$ est dérivable sur $[0;1]$ par produit, de dérivée $g' : x \mapsto 1 \times f(x) + x \times f'(x) = f(x) + x f'(x)$. Autrement dit, la fonction $g : x \mapsto x f(x)$ est une primitive de $x \mapsto f(x) + x f'(x)$ sur $[0;1]$; par conséquent :

$$\int_0^1 [f(x) + x f'(x)]\,dx = \big[g(x)\big]_0^1 = \big[x f(x)\big]_0^1 = 1 \times f(1) - 0 \times f(0) = f(1).$$

2) Par linéarité de l'intégrale, on a $\int_0^1 [f(x) - f(1)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f(1)\,dx$,

d'où $\int_0^1 [f(x) - f(1)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \big[f(1)x\big]_0^1 = \int_0^1 f(x)\,dx - \big[f(1) \times 1 - f(1) \times 0\big]$

$= \int_0^1 f(x)\,dx - f(1) = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 [f(x) + x f'(x)]\,dx$, d'après 1).

$= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x f'(x)\,dx$, par linéarité de l'intégrale.

$= -\int_0^1 x f'(x)\,dx$.

- Partie B 1) • On a $\lim_{x \to 2} (2+x) = 4$. Si $x < 2$, on a $2 - x > 0$, par conséquent $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (2-x) = 0^+$. On en déduit que $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{2+x}{2-x} = +\infty$, par quotient.

Or $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc par composition, $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \ln \frac{2+x}{2-x} = +\infty$, soit $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

• On a $\lim_{x \to -2} (2-x) = 4$. Si $x > -2$, on a $2 + x > 0$, donc $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} (2+x) = 0^+$.

Par quotient, on déduit que $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{2+x}{2-x} = 0^+$. Or $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par composition, $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \ln \frac{2+x}{2-x} = -\infty$, soit $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$.

2) a) $x \overset{u}{\mapsto} \frac{2+x}{2-x}$ est dérivable (par somme et quotient) et strictement positive sur $]-2;2[$, donc $f = \ln u$ est dérivable par composition sur $]-2;2[$ et $f' = \frac{u'}{u}$,

soit, pour tout $x \in]-2;2[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1 \times (2-x) - (2+x) \times (-1)}{(2-x)^2}}{\frac{2+x}{2-x}} = \dfrac{\frac{4}{(2-x)^2}}{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{4}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{2+x}$,

soit $f'(x) = \frac{4}{(2-x)(2+x)} = \frac{4}{2^2 - x^2} = \frac{4}{4 - x^2}$.

2) b) Si $x \in]-2;2[$, on a $x^2 < 4$ (voir tableau des variations de la fonction carré ci-contre),

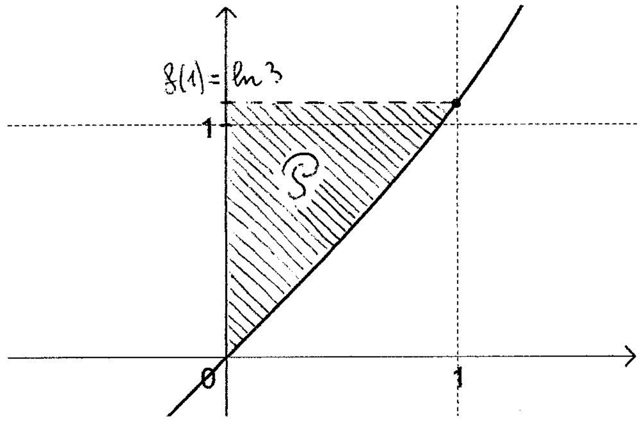
x	-2	0	2
$x \mapsto x^2$	4 ↘	0	↗ 4

d'où $4 - x^2 > 0$, ce qui prouve que $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau des variations de f :

x	-2	2
$f'(x)$		
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

→

- Partie C



Notons que $f(1) = \ln \frac{2+1}{2-1} = \ln 3$.

Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $f(x) \leqslant f(1)$, soit $f(x) \leqslant \ln 3$ (par croissance de f sur $]-2\,;2[$). L'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{P}$ est donc égale, en unités d'aire, à :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 [f(1) - f(x)]\,dx = -\int_0^1 [f(x) - f(1)]\,dx$$ (par linéarité de l'intégrale),

d'où $\mathcal{A} = \int_0^1 x f'(x)\,dx$, d'après la partie A.

Or, d'après B) 2) b), on a pour tout $x \in]-2\,;2[$, $f'(x) = \frac{4}{4-x^2}$, donc

$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{4x}{4-x^2}\,dx$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $\frac{4x}{4-x^2} = -2\,\frac{-2x}{4-x^2} = -2\,\frac{v'(x)}{v(x)}$,

en notant $v(x) = 4 - x^2$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $v(x) > 0$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{4x}{4-x^2}$ sur $[0\,;1]$ est $x \mapsto -2\ln[v(x)] = -2\ln(4-x^2)$.

On en déduit que $\mathcal{A} = \left[-2\ln(4-x^2)\right]_0^1 = -2\ln 3 + 2\ln 4 = 2\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}575$.

En admettant que le repère est orthonormé d'unité 2 cm, l'aire du domaine $\mathcal{P}$ est alors égale à $\left(2\ln\frac{4}{3}\right) \times 4\ \text{cm}^2 \approx 2{,}3\ \text{cm}^2$.