Mobiliser quelques souvenirs de 1$^{\text{re}}$ S concernant les suites...

Un résumé du cours de 1reS sur les suites est en ligne sur le mathblog (http ://blog.crdp-versailles.fr/blang)

$\boxed{\text{A}}$ Soit la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 0$, par : $\quad u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4}$.

1. (a) Calculez u_1, u_2 et u_3.
   (b) Écrire une fonction en langage Python qui prend en paramètre un entier naturel n, et qui retourne la valeur du terme de rang n de la suite u.

   $\hookrightarrow$ Utilisez votre programme pour donner une approximation de u_{10}, u_{20} et u_{50}.

   (c) Vers quelle valeur semble se rapprocher de plus en plus le terme u_n à mesure que le rang n augmente ?
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifiez vos réponses.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$.
   (a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,75$.
   Exprimez alors v_n puis u_n en fonction de n.
   (b) Exprimez en fonction de $n \in \mathbb{N}$: $\; s' = \sum_{k=0}^{n} v_k \;$ puis $\; s = \sum_{k=0}^{n} u_k$
   (c'est-à-dire $\; s' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \;$ et $\; s = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$).

$\boxed{\text{B}}$ Soit la suite w définie par son terme initial $w_0 = 3$ et la relation, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{3w_n - 2}{2w_n - 1}$.

On admet que la suite précédente est effectivement bien définie et qu'on a en outre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 1$.

1. Calculer w_1 et w_2.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{w_n - 1}$.
   (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que $\dfrac{1}{w_{n+1} - 1} = \dfrac{2w_n - 1}{w_n - 1}$, puis que $u_{n+1} - u_n = 2$.
   (c) Exprimer alors u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{4n + 3}{4n + 1}$.
3. (a) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $w_n \in]1\,;\,1,001[$.
   (b) Soit un réel $\varepsilon > 0$ fixé.
   Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $w_n \in]1\,;\,1 + \varepsilon[$.