

Contrôle de Spécialité Mathématiques n°1

I Restituer la démonstration vue en cours des deux propriétés suivantes :

- 1) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Si a divise b et b divise a , alors $|a| = |b|$.
- 2) Soit $(a, b, c, u, v) \in \mathbb{Z}^5$ tel que a divise b et a divise c . Alors a divise $u \times b + v \times c$.

II Soient a , b et c trois entiers relatifs tels que a divise b et a divise c . Montrer que a^3 divise $ac^2 + b^2c - b^3$.

III Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^5 - 9n^3$ est divisible par n^3 et par $n + 3$.

IV Soit a un entier divisible par 3 et b un entier divisible par 11. Montrer $22a^2 + 9b - 30ab$ est divisible par 99.

V a) Développer $(x^2 + 2y^2)^2$.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Démontrer que $a^4 + 4b^4$ est divisible par $a^2 + 2b^2 + 2ab$.

VI Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $9n + 7$ et $5n + 4$ sont premiers entre eux.

VII a) Développer $(x + 2)(2y - 1)$.

b) Résoudre l'équation diophantienne $2xy + 4y - x = 7$ (c'est-à-dire trouver tous les couples (x, y) , avec x et y dans $\mathbb{Z}$, vérifiant l'égalité précédente).

BONUS

Montrer qu'un entier dont l'écriture décimale s'obtient en juxtaposant une fois le même nombre à 4 chiffres est divisible par 137 (exemples : 16 861 686, 50 475 047 sont divisibles par 137).