

Corrigé du contrôle de Spécialité Mathématiques n°1

I Cf cours.

II a divise b et a divise c , donc il existe des entiers relatifs k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'a$. On a alors $ac^2 + b^2c - b^3 = a(k'a)^2 + (ka)^2k'a - (ka)^3$, d'où $ac^2 + b^2c - b^3 = (k'^2 + k^2k' - k^3)a^3$, soit $ac^2 + b^2c - b^3 = Ka^3$, avec $K = k'^2 + k^2k' - k^3 \in \mathbb{Z}$, vu que k et k' sont dans $\mathbb{Z}$, ce qui prouve que a^3 divise $ac^2 + b^2c - b^3$.

III On a $n^5 - 9n^3 = n^3(n^2 - 9)$, soit $n^5 - 9n^3 = kn^3$, avec $k = n^2 - 9 \in \mathbb{Z}$ (vu que $n \in \mathbb{Z}$), ce qui prouve que n^3 divise $n^5 - 9n^3$.

On a également $n^5 - 9n^3 = n^3 \underbrace{(n-3)(n+3)}_{n^2-9}$, soit $n^5 - 9n^3 = k'(n+3)$, avec $k' = n^3(n-3) \in \mathbb{Z}$ (vu que $n \in \mathbb{Z}$), ce qui prouve que $n+3$ divise $n^5 - 9n^3$.

IV 3 divise a (resp. 11 divise b) donc il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ (resp. $k_2 \in \mathbb{Z}$) tel que $a = 3k_1$ (resp. $b = 11k_2$). On a alors :

$$\begin{aligned} 22a^2 + 9b - 30ab &= 22(3k_1)^2 + 9 \times 11k_2 - 30 \times 3k_1 \times 11k_2 \\ &= 99(2k_1^2 + k_2 - 10k_1k_2) \\ &= 99k \end{aligned}$$

avec $k = 2k_1^2 + k_2 - 10k_1k_2 \in \mathbb{Z}$ (vu que $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$), ce qui prouve que $22a^2 + 9b - 30ab$ est divisible par 99.

V a) On a $(x^2 + 2y^2)^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times 2y^2 + (2y^2)^2$, soit $(x^2 + 2y^2)^2 = x^4 + (2xy)^2 + 4y^4$.

b) En prenant $x = a$ et $y = b$, la relation précédente entraîne :

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab) \\ &= k(a^2 + 2b^2 + 2ab) \end{aligned}$$

avec $k = a^2 + 2b^2 - 2ab \in \mathbb{Z}$ (vu que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$), ce qui prouve que $a^2 + 2b^2 + 2ab$ divise $a^4 + 4b^4$.

VI Soit d un entier divisant à la fois $5n + 4$ et $9n + 7$. L'ensemble des multiples de d est stable par combinaisons linéaires à coefficients entiers (voir propriété 3 du cours), donc :

$$d \text{ divise } 9 \times (5n + 4) + (-5) \times (9n + 7),$$

donc d divise $45n + 36 - 45n - 35 = 1$. Or, les diviseurs de 1 sont -1 et 1 , donc $d \in \{-1; 1\}$, ce qui prouve que les diviseurs communs de $5n + 4$ et $9n + 7$ sont -1 et 1 , et donc que $5n + 4$ et $9n + 7$ sont premiers entre eux.

VII a) On a $(x+2)(2y-1) = 2xy + 4y - x - 2$.

b) Soient x et y dans $\mathbb{Z}$; $2xy + 4y - x = 7 \iff 2xy + 4y - x - 2 = 5$

$\iff (x+2)(2y-1) = 5$ (voir question précédente)

$\iff x+2$ divise 5 et $2y-1 = \frac{5}{x+2}$ (noter que $x+2$ et $2y-1$ sont entiers car x et y le sont)

$\iff x+2 \in \{-5; -1; 1; 5\}$ et $2y = 1 + \frac{5}{x+2} = \frac{x+7}{x+2}$

$\iff x \in \{-7; -3; -1; 3\}$ et $y = \frac{x+7}{2x+4}$

$\iff (x, y) \in \{(-7, 0); (-3, -2); (-1, 3); (3, 1)\}$

BONUS Un entier du type considéré s'écrit sous la forme $n = a + 10000a$, où a est un entier dont l'écriture décimale comporte 4 chiffres (exemple : $16861686 = a + 10000a$ avec $a = 1686$). On a donc $n = 10001a$, d'où $n = 137 \times 73a$, soit $n = 137k$ avec $k = 73a \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que n est divisible par 137.