TS

Correction de la question 5)c) du polycopié « Calculs avec un nombre imaginaire »

5)c) Calculer $\mathcal{S} = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \cdots + \mathrm{i}^{2012} + \mathrm{i}^{2013} + \mathrm{i}^{2014}$.

$\hookrightarrow$ **Rappel** : si q est un nombre réel différent de 1, et si n est un entier naturel, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (\star)$$

En fait cette formule est également vraie si q est un nombre ***complexe***. La démonstration est la même :
En développant, on a $(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n) =$
$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n - q(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n)$,
d'où $(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n) =$
$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n-q-q^2-q^3-q^4-\ldots-q^n-q^{n+1}$.
Presque tous les termes de la somme se neutralisent deux à deux, sauf le premier et le dernier, par conséquent :
$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+q^n) = 1-q^{n+1}$ et comme $q \neq 1$, on a $q-1 \neq 0$, ce qui permet d'établir que $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Revenons à la question initiale. En utilisant la formule $(\star)$ avec $q = \mathrm{i}$ et $n = 2014$, on obtient :

$$\mathcal{S} = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \cdots + \mathrm{i}^{2012} + \mathrm{i}^{2013} + \mathrm{i}^{2014} = \frac{1 - \mathrm{i}^{2015}}{1 - \mathrm{i}}.$$

Or, le reste de la division euclidienne de 2015 par 4 est 3 (on a $2015 = 503 \times 4 + 3$) donc $\mathrm{i}^{2015} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$. On obtient alors $\mathcal{S} = \dfrac{1-(-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}$, d'où $\mathcal{S} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$, soit $\mathcal{S} = \dfrac{1^2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2} = \dfrac{1+2\mathrm{i}-1}{1+1} = \dfrac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$.