

TS - Le raisonnement par récurrence : correction d'exercices

→ • n° 14 p 19 a) $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$,
 $u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ et
 $u_4 = 2u_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$.

b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n = 2^n - 1$.

• Initialisation : on a $2^1 - 1 = 1 = u_1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$;
on a $u_n = 2^n - 1$, donc $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1$, d'où $u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1$
et finalement $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^n - 1$.

→ • n° 13 p 19 Notons $\mathcal{S}(n)$ la proposition : $\underbrace{1+x+x^2+\dots+x^n}_{\sum_{k=0}^n x^k} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : on a $\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1$ et $\frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$, d'où
 $\sum_{k=0}^0 x^k = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}$, ce qui prouve que $\mathcal{S}(0)$ est vraie.

• Hérédité : supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$;
on a $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, d'où $1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$,
donc $1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x}$,
et finalement $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$, ce qui prouve que $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

→ • n° 24 p 20 Notons, pour $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition $5^n \geq 4^n + 3^n$.

• Initialisation : on a $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$, donc $5^2 \geq 4^2 + 3^2$ (en fait, il y a même égalité), ce qui prouve que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

• Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \geq 2$;

on a $5^n \geq 4^n + 3^n$, d'où $5 \times 5^n \geq 5 \times (4^n + 3^n)$, donc $5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n$
(car $5 > 0$)

D'autre part, $5 \geq 4$ donc $5 \times 4^n \geq 4 \times 4^n$ car $4^n > 0$

d'où $5 \times 4^n \geq 4^{n+1}$
(2)

De même, $5 \geq 3$ donc $5 \times 3^n \geq 3 \times 3^n$ car $3^n > 0$

d'où $5 \times 3^n \geq 3^{n+1}$
(3)

En additionnant membre à membre les inégalités (2) et (3), on obtient
 $5 \times 4^n + 5 \times 3^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$. D'après (1), on en déduit que $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$,
ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.



• Cela prouve par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 3^n$.

→ • n°: 12 p 19 Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

• Initialisation: on a $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1^2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Hérédité: supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$;
on a $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ donc $\sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1)-1 = n^2 + 2(n+1)-1$,

d'où $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

→ • n°: 75 p 26 ** (exercice plus difficile!)

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition: $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2}n$.

• On a $\sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1 \geq 1 + \frac{1}{2} \times 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$; on a $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2}n$ (*).

On a $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \underbrace{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}}_S$; la somme S est constituée de 2^n termes

(car $2^{n+1} - (2^n + 1) + 1 = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n$) dont le plus petit est $\frac{1}{2^{n+1}}$. On peut en

déduire que $S \geq 2^n \times \frac{1}{2^{n+1}}$, soit $S \geq \frac{1}{2}$. En additionnant membre à membre

cette dernière inégalité et (*), on obtient alors $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + S \geq 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$, soit

$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2}(n+1)$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice supplémentaire: montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $7^n \geq 8n - 1$

→ SOLUTION: Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition $7^n \geq 8n - 1$

• Initialisation: on a $7^1 = 7 = 8 \times 1 - 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Hérédité: supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \geq 1$; on a

donc $7^n \geq 8n - 1$, d'où $7 \times 7^n \geq 7(8n - 1)$, soit $7^{n+1} \geq 56n - 7$ (*)

(car $7 > 0$)
On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que $7^{n+1} \geq 8(n+1) - 1$,
ce qui équivaut à $7^{n+1} \geq 8n + 7$. Pour prouver cela, il suffit d'établir

que $56n - 7 \geq 8n + 7$ ($\square$), car associée à (*), cette inégalité prouvera bien

que $7^{n+1} \geq 8n + 7$. Or ($\square$) $\Leftrightarrow 48n \geq 14 \Leftrightarrow n \geq \frac{14}{48} = \frac{7}{24}$ (car $48 > 0$), ce qui est bien vrai car $n \geq 1$. Conclusion: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Bilan: $\mathcal{P}$ est héréditaire et vraie au rang $n=1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.