Correction des exercices 4)d), 4)f) et 6) du polycopié sur la divisibilité

4)d) • **Méthode n°1**

Soit $n \in \mathbb{Z}$; on a :

$$\begin{aligned} n^3+1 &= n^3-n+n+1 \\ &= n\left(n^2-1\right)+n+1 \\ &= n(n-1)(n+1)+(n+1) \\ &= (n+1)[n(n-1)+1] \\ &= (n+1)\left(n^2-n+1\right) \\ &= k\times(n+1) \text{ avec } k=n^2-n+1\in\mathbb{Z} \text{ (vu que } n\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Cela prouve bien que $n+1$ divise n^3+1.

• **Méthode n°2**

On sait que pour tous réels x et y, on a $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

En choisissant $x=n$ (où $n\in\mathbb{Z}$) et $y=1$, on obtient : $n^3+1^3=(n+1)(n^2-n\times 1+1^2)$, soit $n^3+1=k(n+1)$, avec $k=n^2-n+1\in\mathbb{Z}$. Cela prouve que bien que $n+1$ divise n^3+1.

⚠ **Cherchez d'abord les exercices 4)f) et 6) avant d'étudier leur corrigé.**

4)f) Soit $n \in \mathbb{Z}$; on a :

$$\begin{aligned} n^4+n^2+1 &= n^4+2n^2+1-n^2 \\ &= \left(n^2+1\right)^2-n^2 \\ &= (n^2+1-n)(n^2+1+n) \\ &= k\times(n^2+n+1) \text{ avec } k=n^2-n+1\in\mathbb{Z} \text{ (vu que } n\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Cela prouve bien que n^2+n+1 divise n^4+n^2+1.

6) Soit $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$; on a :

$$\begin{aligned} a^{16}-b^{16} &= \left(a^8\right)^2-\left(b^8\right)^2 \\ &= \left(a^8-b^8\right)\left(a^8+b^8\right) \\ &= \left[(a^4)^2-(b^4)^2\right]\left(a^8+b^8\right) \\ &= \left(a^4-b^4\right)\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right) \\ &= \left[(a^2)^2-(b^2)^2\right]\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right) \\ &= \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right) \\ &= (a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right) \\ &= (a-b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^8+b^8\right)\times\underbrace{(a+b)\left(a^4+b^4\right)}_{a^5+ab^4+a^4b+b^5} \\ &= k\times\left(a^5+ab^4+a^4b+b^5\right) \text{ avec } k=(a-b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^8+b^8\right)\in\mathbb{Z}\text{, vu que } (a,b)\in\mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Cela prouve bien que $a^{16}-b^{16}$ est divisible par $a^5+ab^4+a^4b+b^5$.