

• I) Notons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  la proposition :  $10^n \geq 9n + 1$ .

• Initialisation : on a  $10^0 = 1$  et  $9 \times 0 + 1 = 1$  donc  $10^0 \geq 9 \times 0 + 1$  :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• Hérédité : supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie à un certain rang  $n \in \mathbb{N}$  ; on a donc  $10^n \geq 9n + 1$ , d'où  $10 \times 10^n \geq 10(9n + 1)$  car  $10 > 0$ , soit  $10^{n+1} \geq 90n + 10$ . Or  $90 \geq 9$  donc  $90n \geq 9n$  (car  $n \geq 0$ ), d'où  $90n + 10 \geq 9n + 10$ . On en déduit que  $10^{n+1} \geq 9n + 10$ , soit  $10^{n+1} \geq 9(n+1) + 1$ , ce qui prouve que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

• La proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie au rang 0 et est héréditaire, par conséquent elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

• II) 1) Soit  $z \in \mathbb{C}$  ;  $8z - i = 2 + 6iz \Leftrightarrow (8 - 6i)z = 2 + i \Leftrightarrow z = \frac{2+i}{8-6i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(2+i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} = \frac{16+12i+8i-6}{8^2-(6i)^2} = \frac{10+20i}{64+36} = 0,1 + 0,2i$$

2) Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$  ;  $\frac{2z+5}{2-z} = 5z \Leftrightarrow 2z+5 = 5z(2-z) \Leftrightarrow 2z+5 = 10z-5z^2$

$\Leftrightarrow 5z^2 - 8z + 5 = 0$  : on aboutit donc à une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant vaut  $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 5 \times 5 = -36 < 0$  ; elle-ci possède donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{8 + i\sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{8 + 6i}{10} = 0,8 + 0,6i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 0,8 - 0,6i$$

3) Posons  $z = a + bi$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

$$i\overline{z} + 4 = 2z - i \Leftrightarrow i(a - bi) + 4 = 2(a + bi) - i \Leftrightarrow ai - bi^2 + 4 = 2a + 2bi - i$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{b}_{\in \mathbb{R}} + 4 + \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}}i = \underbrace{2a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(2b-1)}_{\in \mathbb{R}}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+4 = 2a \\ \text{et} \\ a = 2b-1 \end{cases}, \text{ par unicité de la forme algébrique d'un complexe.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+4 = 2(2b-1) \\ \text{et} \\ a = 2b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 3b \\ \text{et} \\ a = 2b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \text{et} \\ a = 2 \times 2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow z = 3 + 2i$$

4) Posons  $z = a + bi$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

$$(3+4i)z = -5\overline{z} \Leftrightarrow (3+4i)(a+bi) = -5(a-bi)$$

$$\Leftrightarrow 3a + 3bi + 4ai - 4b = -5a + 5bi \Leftrightarrow \underbrace{3a-4b}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(3b+4a)}_{\in \mathbb{R}}i = \underbrace{-5a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{5b}_{\in \mathbb{R}}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-4b = -5a \\ \text{et} \\ 3b+4a = 5b \end{cases}, \text{ par unicité de la forme algébrique d'un complexe.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 4b \\ \text{et} \\ 4a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow b = 2a \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 2\text{Re}(z) : \text{les solutions de}$$

l'équation sont donc les nombres complexes dont la partie imaginaire est le double de la partie réelle ; ils s'écrivent sous la forme  $a + 2ai$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  (par exemple  $1 + 2i$ ,  $-3 - 6i$ ,  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$  etc. sont solutions).

• III) 1) On a  $Z = i(z-1)(\overline{z}+1) + 2 - 3i = i(\underbrace{z\overline{z}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{z-\overline{z}}_{\in \mathbb{R}} - 1) + 2 - 3i$

donc  $Z = i z \overline{z} - 2 \text{Im}(z) + 2 - 4i$  ; d'autre part,  $z = \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{iy}_{\in \mathbb{R}}i$ , donc

$$Z = i(x+yi)(x-yi) - 2y + 2 - 4i = i(x^2+y^2) - 2y + 2 - 4i, \text{ soit}$$

$$Z = \underbrace{2-2y}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(x^2+y^2-4)}_{\in \mathbb{R}} i, \text{ d'où } \operatorname{Re}(Z) = 2-2y \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = x^2+y^2-4.$$

$$2) Z \text{ est imaginaire pure} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow 2-2y = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

L'ensemble cherché est donc la droite d'équation  $y=1$ .

$$3) Z \text{ est réel} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4 \Leftrightarrow OM^2 = 4, \text{ où } O \text{ désigne l'origine du repère et } M \text{ le point de coordonnées } (x; y) \text{ (c'est-à-dire d'affixe } z).$$

donc  $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow OM = 2 \Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de centre } O \text{ et de rayon } 2.$

• IV) 1) a)  $u_1 = \frac{3u_0}{3+2u_0} = \frac{9}{3+6} = 1$ ;  $u_2 = \frac{3u_1}{3+2u_1} = \frac{3}{5}$  et  $u_3 = \frac{3u_2}{3+2u_2} = \frac{\frac{9}{5}}{3+\frac{6}{5}} = \frac{9}{15+6} = \frac{3}{7}$ .

1) b) Notons  $\mathcal{P}(n)$  la proposition:  $u_n > 0$ .

• Initialisation: on a  $u_0 = 3 > 0$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• Hérédité: supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie à un certain rang  $n \in \mathbb{N}$ ; On a donc  $u_n > 0$ . Or  $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3+2u_n}$ ; comme 2, 3 et  $u_n$  sont strictement positifs, on en déduit que  $u_{n+1} > 0$ , ce qui prouve que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

• La proposition  $\mathcal{P}(n)$  est vraie au rang 0 et est héréditaire, par conséquent elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1) c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; on a  $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{3+2u_n} - u_n = \frac{3u_n}{3+2u_n} - \frac{u_n(3+2u_n)}{3+2u_n}$ , soit

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 3u_n - 2u_n^2}{3+2u_n} = \frac{-2u_n^2}{3+2u_n} < 0, \text{ car } u_n > 0 \text{ et } u_n^2 > 0.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n < 0$ , ce qui prouve la stricte décroissance de  $(u_n)$ .

2) a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; on a  $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{u_{n+1}} - \frac{3}{u_n} = \frac{3}{\frac{3u_n}{3+2u_n}} - \frac{3}{u_n} = \frac{3(3+2u_n)}{3u_n} - \frac{3}{u_n}$ ,

$$\text{d'où } u_{n+1} - u_n = \frac{3+2u_n}{u_n} - \frac{3}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2. \text{ On en déduit que } (u_n) \text{ est}$$

une suite arithmétique de raison 2; d'où  $u_n = u_0 + 2n = \frac{3}{u_0} + 2n = 2n+1$ ,  
ceci pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2) b) Si  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = \frac{3}{u_n}$ , d'où  $u_n = \frac{3}{2n+1}$ .

3) Notons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  la proposition:  $u_n = \frac{3}{2n+1}$ .

• Initialisation: on a  $u_0 = 3 = \frac{3}{2 \times 0 + 1}$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• Hérédité: supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie à un certain rang  $n \in \mathbb{N}$ ;

$$\text{on a } u_n = \frac{3}{2n+1}, \text{ donc } u_{n+1} = \frac{3u_n}{3+2u_n} = \frac{3 \times \frac{3}{2n+1}}{3+2 \times \frac{3}{2n+1}} = \frac{\frac{9}{2n+1}}{3+\frac{6}{2n+1}} = \frac{\frac{9}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}}$$

$$\text{d'où } u_{n+1} = \frac{3}{2n+1+2}, \text{ soit } u_{n+1} = \frac{3}{2(n+1)+1}, \text{ ce qui prouve que } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

• La proposition  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie au rang 0 et est héréditaire, par conséquent elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .