Correction de l'exercice V du contrôle n°1

1) Comme $\omega \neq 1$, on a $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+w^6 = \dfrac{1-\omega^{6+1}}{1-\omega} = \dfrac{1-\omega^7}{1-\omega} = \dfrac{1-1}{1-\omega} = 0$.

Alors $S+T = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+w^6 = (\underbrace{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+w^6}_{0}) - 1 = -1$.

D'autre part, $S \times T = (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6)$, soit
$S \times T = \omega^4+\omega^6+\omega^7+\omega^5+\omega^7+\omega^8+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}$
$= 2\omega^7 + w^4(\underbrace{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+w^6}_{0}) = 2\times 1 + w^4 \times 0 = 2$.

2) On a $S+T=-1$ donc $T=-S-1$ [resp. $S=-T-1$] et comme $ST=2$, on obtient $S(-S-1)=2$ [resp. $T(-T-1)=2$], soit $S^2+S+2=0$ [resp. $T^2+T+2=0$].

Notons que S et T sont différents car si on avait $S=T$, on aurait $S+S=-1$, d'où $T=S=-\frac{1}{2}$ mais alors ST ne serait pas égal à 2.

L'équation du second degré à coefficients réels $z^2+z+2=0$ a un discriminant égal à $\Delta=-7<0$, donc elle possède deux racines conjuguées : $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{i}$ et $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{i}$; d'après ce qui précède, il s'agit forcément de S et T (dans cet ordre ou non). Cela prouve que $T=\overline{S}$, que $\mathfrak{Re}(S)=-\frac{1}{2}$ et $|\mathfrak{Im}(S)|=\frac{\sqrt{7}}{2}$.