Opérations sur les limites : exercices d'entraînement corrigés

A Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2+10)$

b) $u_n = \dfrac{2n^3 - n}{n^2+n+1}$

c) $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3+5}$

d) $u_n = \dfrac{5^n+3^n}{4^n}$

e) $u_n = 4^n - 2^n$

f) $u_n = \dfrac{n^2-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+3}$

B On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 161$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$.

1) Écrire un algorithme qui permet, à partir de la valeur de n entrée par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de u_n.

Le traduire en un programme (sur calculatrice ou dans le langage de son choix) et l'utiliser pour calculer u_{10}, u_{20}, u_{30} et u_{40} : quelle conjecture peut-on formuler quant à la convergence de la suite (u_n) ?

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 20$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique(préciser le premier terme et la raison).

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de (u_n).

CORRECTION

A

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2+10) = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{10}{n} = n + \dfrac{10}{n}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(10 \times \frac{1}{n}\right) = 10 \times 0 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme : } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

b) On a $u_n = \dfrac{n^2\left(2n - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2n - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n^2}\right) = 1 + 0 + 0 \underbrace{=}_{(\natural)} 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2n - \tfrac{1}{n}\right) \underbrace{=}_{(\square)} +\infty$$

On déduit de ($\natural$) et ($\square$) par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3+5} = \dfrac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4n+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4n+\frac{5}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = -2\times 0 = 0 \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 3\times 0 = 0\end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\tfrac{2}{n}+\tfrac{3}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\natural)} 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 5\times 0 = 0\end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(4n+\tfrac{5}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\star)} +\infty$$

On déduit de ($\natural$) et ($\star$) par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque : on pouvait également mettre en facteur n^3 en haut et en bas ou même mettre en facteur n^2 en haut et n^3 en bas.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{5^n+3^n}{4^n} = \dfrac{5^n}{4^n} + \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Or $\dfrac{5}{4} \in]1;+\infty[$ et $\dfrac{3}{4} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.
On déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n+3^n}{4^n} = +\infty$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $4^n - 2^n = 4^n\left(1-\dfrac{2^n}{4^n}\right) = 4^n\left[1-\left(\dfrac{2}{4}\right)^n\right] = 4^n\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.
On a $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1-0 \underbrace{=}_{\natural} 1$.
Comme $4 \in]1;+\infty[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n \underbrace{=}_{(\star)} +\infty$. On déduit de ($\star$) et ($\natural$) par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(4^n-2^n) = +\infty$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{\dfrac{n^2-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}}{\dfrac{n\sqrt{n}+3}{n\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{n\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}-\dfrac{1}{n}}{1+3\times\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

- Par produit et somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+3\times\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1+3\times 0\times 0 = 1$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-\dfrac{1}{n}\right) = +\infty$.
- Finalement, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\boxed{\textbf{B}}$ **1)** Algorithme permettant de calculer le terme de rang N de la suite u définie par $u_0 = 161$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$:

Entrée	Demander N
Initialisation	$U \leftarrow 161$
Traitement	Pour k allant de 1 à N $U \leftarrow 0,6 \times U + 8$ Fin Pour
Sortie	Afficher U

Et sa traduction en langage TI :

```
Prompt N
161 → U
For(I,1,N)
0,6*U+8 → U
End
Disp "U=",U
```

n	10	20	30	40
u_n	20,9	20,005	20,0003	20,0000002

Il semble donc que la suite (u_n) converge (très rapidement) vers 20.

2)a) Si $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 20$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,6u_n + 8 - 20 \\ &= 0,6u_n - 12 \\ &= 0,6(u_n - 20) \end{aligned}$$

soit $v_{n+1} = 0,6v_n$, ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,6$. Son terme initial est $v_0 = u_0 - 20 = 161 - 20 = 141$.

2)b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times 0,6^n = 141 \times 0,6^n$.

2)c) (v_n) est une suite géométrique dont la raison appartient à l'intervalle $]-1;1[$, donc elle converge vers 0. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = v_n + 20$, on déduit par somme que (u_n) converge vers $0 + 20 = 20$.