

TS - Utilisation du Théorème « des gendarmes »

Exercice : déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{n^3 + 5 \times (-1)^n}{n^3 + n}$

Solution : dans tout la suite n est un entier strictement positif.

• Méthode n°1 on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-5 \leq 5 \times (-1)^n \leq 5$ (car $5 > 0$), d'où $n^3 - 5 \leq n^3 + 5 \times (-1)^n \leq n^3 + 5$. Comme $n^3 + n > 0$ (car $n > 0$), on

en déduit que $\frac{n^3 - 5}{n^3 + n} \leq \frac{n^3 + 5 \times (-1)^n}{n^3 + n} \leq \frac{n^3 + 5}{n^3 + n}$, d'où

$$\frac{\frac{n^3 - 5}{n^3}}{\frac{n^3 + n}{n^3}} \leq u_n \leq \frac{\frac{n^3 + 5}{n^3}}{\frac{n^3 + n}{n^3}}, \text{ soit}$$

$$\frac{1 - 5 \times \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} \leq u_n \leq \frac{1 + 5 \times \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Par produit, somme et quotient, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 5 \times \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 5 \times 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 5 \times \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 + 5 \times 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

• Méthode n°2 on a $u_n = \frac{\frac{n^3 + 5 \times (-1)^n}{n^3}}{\frac{n^3 + n}{n^3}} = \frac{1 + 5 \times \frac{(-1)^n}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} (*)$

On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{(-1)^n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ (car $n^3 > 0$). Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ et

par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n^3}\right) = -1 \times 0 = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0$. Comme on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, la forme (*) de u_n

permet de déduire, par produit, somme et quotient que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + 5 \times 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1.$$