Spé maths, TS

Arithmétique : autour de la notion de divisibilité

Correction de l'exercice n°9

a) Soient 7 entiers consécutifs :

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5 \text{ et } n+6 \quad (\text{où } n\in\mathbb{Z}).$$

Ils ont pour somme $S = n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)$, soit $S = 7n+1+2+3+4+5+6 = 7n+21 = 7(n+3)$, d'où $S = 7k$ avec $k = n+3 \in \mathbb{Z}$ (car $n\in\mathbb{Z}$), ce qui prouve bien que S est divisible par 7.

b) Soit p un entier naturel impair et soient p entiers consécutifs :

$$n, n+1, n+2, \cdots, n+p-2, n+p-1 \quad (\text{où } n\in\mathbb{Z}).$$

Ils ont pour somme $S = n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+p-2)+(n+p-1) = \sum_{k=0}^{p-1}(n+k)$.
Il s'agit d'une somme de p termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1, donc :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = p\times\frac{n+(n+p-1)}{2},$$

soit :

$$S = p\times\frac{2n+p-1}{2} = p\left(n+\frac{p-1}{2}\right).$$

Comme p est impair, $p-1$ est pair, donc $\dfrac{p-1}{2}\in\mathbb{Z}$.
Par conséquent $S = kp$, avec $k = n+\dfrac{p-1}{2}\in\mathbb{Z}$, ce qui prouve que S est divisible par p.

c) Le résultat est faux si p est pair. Par exemple $7+8=15$ n'est pas divisible par 2 ou $3+4+5+6=18$ n'est pas divisible par 4.