

- 8) a) Un nombre palindrome à 4 chiffres s'écrit sous la forme $x = \overline{a b b a}$, avec a et b entiers naturels strictement inférieurs à 10 et $a \neq 0$.

On a $x = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \times 91a + 11 \times 10b$,
d'où $x = 11(91a + 10b) = 11k$, avec $k = 91a + 10b \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve
que x est divisible par 11.

- b) Un nombre palindrome à 6 chiffres s'écrit sous la forme $x = \overline{a b c c b a}$,
avec a, b et c dans $\mathbb{N}$ tels que $0 < a \leq 9$, $b \leq 9$ et $c \leq 9$.

On a $x = 100000a + 10000b + 1000c + 100c + 10b + a$, soit

$x = 100001a + 10010b + 1100c = 11k$, avec $k = 9091a + 910b + 100c \in \mathbb{Z}$,
ce qui prouve que x est divisible par 11.

- c) On a $x = 10000a + 1000b + 100c + 10b + a = 10001a + 1010b + 100c$;
Comme $11 \mid 2a + c - 2b$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2a + c - 2b = 11k$,
soit $c = 2b - 2a + 11k$. On a alors : $x = 10001a + 1010b + 100(2b - 2a + 11k)$,
d'où $x = 10001a + 1010b + 200b - 200a + 1100k = 9801a + 1210b + 1100k$,
et finalement $x = 11k'$, avec $k' = 891a + 110b + 100k \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve
que x est divisible par 11.

En choisissant par exemple $(a, b, c) = (2, 1, 9)$, $(3, 1, 7)$ ou $(4, 1, 5)$, on a
 $2a + c - 2b = 11$, donc d'après ce qui précède 21912, 31713 et 41514
sont des palindromes répondant à la question.

- 2) Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2n+4 \mid 11n+24$. Comme $2n+4 \mid 2n+4$, on a :

$$2n+4 \mid 2 \times (11n+24) + (-11) \times (2n+4),$$

soit $2n+4 \mid 22n+48 - 22n - 44 = 4$. Les diviseurs de 4 sont $-4, -2, -1, 1, 2$ et 4 donc
 $2n+4 = -4, -2, -1, 1, 2$ ou 4, ce qui implique
que $n = -4, -3, -1$ ou 0.

Parmi les 4 valeurs de n précédentes, seules $n = -4$ et $n = 0$ sont telles que
 $2n+4 \mid 11n+24$.

Bilan : les entiers relatifs n vérifiant $2n+4 \mid 11n+24$ sont -4 et 0.

- 3) A) a) $2019 = 37 \times 54 + 21$ et $0 \leq 21 < 37$ donc le quotient est 54 et
le reste est 21.

b) $130 = 1300 \times 0 + 130$ et $0 \leq 130 < 1300$ donc le quotient est 0 et le
reste est 130.

- B) a) On a $n^2 + 3n + 2 = (n+3) \times n + 2$, avec $0 \leq 2 < n+3$ (car $n \geq 1$
donc $n+3 \geq 4 > 2$)
donc le quotient est n et le reste est 2.

b) On a $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = (n+1)(n+3) + 1$, avec $0 \leq 1 < n+1$ (car $n \geq 0$
donc le quotient est $n+3$ et le reste est 1. donc $n+1 > 1$)

3) B) c) On a $n^3 + 3n - 1 = n(n+2) + n - 1$, avec $0 \leq n-1 < n$ (car $n \geq 1$), donc le quotient est $n+2$ et le reste est $n-1$.

4) a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $7 \mid 8^n - 15$.

- On a $8^0 - 15 = -14 = 7 \times (-2)$ donc $7 \mid 8^0 - 15$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a donc $7 \mid 8^n - 15$. Comme $7 \mid 7$, on en déduit que $7 \mid 8(8^n - 15) + 15 \times 7$, soit $7 \mid 8^{n+1} - 120 + 105 = 8^{n+1} - 15$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- $\mathcal{P}$ est héréditaire et vraie au rang 0, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a $8 \equiv 1 [7]$ (car $7 \mid 8-1$) donc $8^n \equiv 1^n [7]$, par compatibilité de $\equiv$ avec l'élevation à la puissance, soit $8^n \equiv 1 [7]$. Or $15 \equiv 1 [7]$ (car $7 \mid 15-1$) donc par transitivité de $\equiv$, $8^n \equiv 15 [7]$, ce qui prouve que $7 \mid 8^n - 15$.

5) a) On a $2018 - 558 = 1460 = 73 \times 20$, donc $73 \mid 2018 - 558$, ce qui prouve que $2018 \equiv 558 [73]$.

b) On a $2019 - (-53) = 2072 = 28 \times 74$, donc $28 \mid 2019 - (-53)$, d'où $2019 \equiv -53 [28]$.

c) $10^9 \equiv 2 [99999998]$ (car $10^9 - 2 = 1000000000 - 2 = 999999998$, qui est bien divisible par 99999998), d'où $(10^9)^5 \equiv 2^5 [99999998]$, par compatibilité de $\equiv$ avec l'élevation à la puissance, soit $10^{45} \equiv 32 [99999998]$.

BONUS • A) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $25 \mid 29 \times 6^n + 5n - 4$.

- On a $29 \times 6^0 + 5 \times 0 - 4 = 29 - 4 = 25$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a donc $25 \mid 29 \times 6^n + 5n - 4$ et comme $25 \mid 25$, on en déduit que :

$$25 \mid 6 \times (29 \times 6^n + 5n - 4) + (1-n) \times 25,$$
 soit $25 \mid 29 \times 6^{n+1} + 30n - 24 + 25 - 25n = 29 \times 6^{n+1} + 5n + 1$,
 soit $25 \mid 29 \times 6^{n+1} + 5(n+1) - 4$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- $\mathcal{P}$ étant héréditaire et vraie au rang 0, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• B) On a $2^{70} = 2^{66} \times 2^4 = (2^6)^{11} \times 16 = 16 \times 64^{11}$
 et $3^{70} = 3^{69} \times 3 = (3^3)^{23} \times 3 = 3 \times 27^{23}$

Comme $64 \equiv -1 [13]$ (car $13 \mid 65$), on a $64^{11} \equiv (-1)^{11} [13]$, soit $64^{11} \equiv -1 [13]$, d'où $16 \times 64^{11} \equiv -16 [13]$, soit $2^{70} \equiv -16 [13]$. (*)

D'autre part, comme $27 \equiv 1 [13]$ (car $13 \mid 26$), on a $27^{23} \equiv 1^{23} [13]$, soit $27^{23} \equiv 1 [13]$, d'où $3 \times 27^{23} \equiv 3 [13]$, soit $3^{70} \equiv 3 [13]$. (†)

On déduit de (*) et (†) que $2^{70} + 3^{70} \equiv \underbrace{-16 + 3}_{-13} [13]$, et comme $-13 \equiv 0 [13]$,

on a $2^{70} + 3^{70} \equiv 0 [13]$, ce qui prouve que $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$