

Correction de l'exercice n°16^{c,e,f} du polycopié sur la divisibilité

c) On a $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, soit $\underbrace{(n+1)^2}_a = \underbrace{(n+2)}_b \times \underbrace{n}_q + \underbrace{1}_r$, avec $0 \leq \underbrace{1}_r < \underbrace{n+2}_b$

(en effet, on a $n \geq 4$ donc $n+2 \geq 6$, d'où $n+2 > 1$).

Bilan : le quotient vaut n et le reste vaut 1.

e) **Brouillon** : en tâtonnant, on s'aperçoit que $(n+3) \times q$ semble dépasser $n^2 + n$ lorsque $q = n$ et $q = n-1$ ($n^2 + 3n$ dans le premier cas et $n^2 + 2n - 3$ dans le second). Lorsque $q = n-2$, on obtient $(n+3) \times q = n^2 + n - 6$, ce qui semble convenir.

↪ On a $\underbrace{n^2 + n}_a = \underbrace{(n+3)}_b \times \underbrace{(n-2)}_q + \underbrace{6}_r$, avec $0 \leq \underbrace{6}_r < \underbrace{n+3}_b$ (en effet, on a $n \geq 4$ donc $n+3 \geq 7$, soit $n+3 > 6$).

Bilan : le quotient vaut $n-2$ et le reste vaut 6.

f) On a $n^2 - 2 = n^2 - n + n - 2$, soit $\underbrace{n^2 - 2}_a = \underbrace{(n-1)}_b \times \underbrace{n}_q + \underbrace{n-2}_r$, avec $0 \leq \underbrace{n-2}_r < \underbrace{n-1}_b$

(en effet, d'une part $n \geq 4$ donc $n-2 \geq 2 \geq 0$ et d'autre part $-2 < -1$ donc $n-2 < n-1$).

Bilan : le quotient vaut n et le reste vaut $n-2$.

Exercice supplémentaire corrigé :

Soit $n \in \mathbb{N}$; écrire l'identité de division euclidienne de $n^2 + 3n - 4$ par $n+5$.

Solution :

Brouillon : en tâtonnant, on constate que $(n+5) \times q$ semble dépasser $n^2 + 3n - 4$ lorsque $q = n$ et $q = n-1$ ($n^2 + 5n$ dans le premier cas et $n^2 + 4n - 5$ dans le second). Lorsque $q = n-2$, on obtient $(n+5) \times q = n^2 + 3n - 10$, ce qui semble convenir.

↪ • Premier cas : $n \geq 2$.

On a $\underbrace{n^2 + 3n - 4}_a = \underbrace{(n+5)}_b \times \underbrace{(n-2)}_q + \underbrace{6}_r$, avec $0 \leq \underbrace{6}_r < \underbrace{n+5}_b$ (en effet, on a $n \geq 2$

donc $n+5 \geq 7$, soit $n+5 > 6$).

Bilan : le quotient vaut $n-2$ et le reste vaut 6.

• Second cas : $n < 2$.

– Lorsque $n = 0$, $n^2 + 3n - 4 = -4$ et $n+5 = 5$: $\underbrace{-4}_a = \underbrace{5}_b \times \underbrace{(-1)}_q + \underbrace{1}_r$.

– Lorsque $n = 1$, $n^2 + 3n - 4 = 0$ et $n+5 = 6$: $\underbrace{0}_a = \underbrace{6}_b \times \underbrace{0}_q + \underbrace{0}_r$.