Spé maths, TS

Divisibilité : utilisation de la récurrence

Exercices :

1) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) 12 divise $13^n + 11$,

b)* 9 divise $7^{n+1} + 3n + 2$.

2) Redémontrer 1.a. en utilisant cette fois les congruences.

Correction :

1) **a)** Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $12 \,|\, 13^n + 11$.

- On a $13^0 + 11 = 1 + 11 = 12$ donc $12 \,|\, 13^0 + 11$, ce qui prouve que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a donc $12 \,|\, 13^n + 11$.

  __**Méthode n°1 :**__ il existe alors un entier relatif k tel que $13^n + 11 = 12k$, soit $13^n = 12k - 11$. D'où $13^{n+1} - 1 = 13 \times 13^n - 1 = 13 \times (12k - 11) - 1$, soit $13^{n+1} - 1 = 12 \times 13k - 144 = 12 \times (13k - 12)$ et finalement $13^{n+1} - 1 = 12k'$, avec $k' = 13k - 12 \in \mathbb{Z}$ (vu que $k \in \mathbb{Z}$). Cela démontre que $12 \,|\, 13^{n+1} + 11$ et donc que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  __**Méthode n°2 :**__ on a $12 \,|\, 13^n + 11$ et $12 \,|\, 12$, donc :
  $$12 \,|\, \underbrace{13 \times (13^n + 11) + (-11) \times 12}_{13^{n+1}+143-132}$$
  soit $12 \,|\, 13^{n+1} + 11$. Cela démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- La proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire et vraie au rang 0, donc elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $9 \,|\, 7^{n+1} + 3n + 2$.

- On a $7^{0+1} + 3 \times 0 + 2 = 7 + 2 = 9$ d'où $9 \,|\, 7^{0+1} + 3 \times 0 + 2$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a donc $9 \,|\, 7^{n+1} + 3n + 2$.

  __**Méthode n°1 :**__ il existe alors un entier relatif k tel que $7^{n+1} + 3n + 2 = 9k$, soit $7^{n+1} = 9k - 3n - 2$. D'où $7^{(n+1)+1} + 3(n+1) + 2 = 7 \times 7^{n+1} + 3n + 5 = 7 \times (9k - 3n - 2) + 3n + 5$, soit $7^{(n+1)+1} + 3(n+1) + 2 = 9 \times 7k - 21n - 14 + 3n + 5$, ou encore $7^{(n+1)+1} + 3(n+1) + 2 = 9 \times 7k - 18n - 9 = 9(7k - 2n - 1)$ et finalement $7^{(n+1)+1} + 3(n+1) + 2 = 9k'$, avec $k' = 7k - 2n - 1 \in \mathbb{Z}$ (vu que $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$). Cela démontre que $9 \,|\, 7^{(n+1)+1} + 3(n+1) + 2$ et donc que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  __**Méthode n°2 :**__ on a $9 \,|\, 7^{n+1} + 3n + 2$ et $9 \,|\, 9$, d'où :
  $$9 \,|\, \underbrace{7 \times (7^{n+1} + 3n + 2) + (-2n - 1) \times 9}_{7^{(n+1)+1}+21n+14-18n-9}$$
  soit $9 \,|\, 7^{(n+1)+1} + 3n + 5 = 7^{(n+1)+1} + 3(n+1) + 2$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- La proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire et vraie au rang 0, donc elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On a $13 \equiv 1$ [12] (car $12 \,|\, \underbrace{13 - 1}_{12}$), donc $13^n \equiv 1^n$ [12] (par compatibilité de $\equiv$ avec l'élévation à la puissance), soit $13^n \equiv 1$ [12]. D'autre part $1 \equiv -11$ [12] (car $12 \,|\, \underbrace{1 - (-11)}_{12}$), d'où par transitivité de $\equiv$, $13^n \equiv -11$ [12], ce qui prouve que 12 divise $13^n - (-11) = 13^n + 11$.