

- I) 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a $u_n = n^3 - 4 \times \frac{1}{\sqrt{n}} + (-100)$. On a par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-4 \times \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -4 \times 0 = 0$; d'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-100) = -100$, d'où par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a $u_n = n^3 \left(3 + (-1) \times \frac{1}{n}\right)$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + (-1) \times \frac{1}{n}\right) = 3 + (-1) \times 0 = 3$, par produit et somme. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a $u_n = \frac{n^4 - 3n}{n^3 + 1} = \frac{n + (-3) \times \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}$. Par produit on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-3) \times \frac{1}{n^2}\right) = -3 \times 0 = 0$; d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - 3 \times \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$. Par somme, on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 1 + 0 = 1$ et finalement par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a $u_n = \frac{\frac{n - \sqrt{n}}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + (-1) \times \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$. On en déduit, par produit, somme et quotient, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + (-1) \times 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$.
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$ et comme $n^2 + n > 0$ (car $n \geq 1$), on obtient $\frac{n^2 - 1}{n^2 + n} \leq \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + n} \leq \frac{n^2 + 1}{n^2 + n}$, soit $\frac{1 + (-1) \times \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$ (*). Or, par produit, somme et quotient, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-1) \times \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + (-1) \times 0}{1 + 0} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$. D'après (*), le théorème des « gendarmes » prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

II) A) 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n + v_n = 120$.

A) 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 90\% \text{ de } u_n + 5\% \text{ de } v_n$

et $v_{n+1} = 95\% \text{ de } v_n + 10\% \text{ de } u_n$, soit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n \\ v_{n+1} = 0,1u_n + 0,95v_n \end{cases}, \text{ ce qui se traduit par les formules suivantes dans}$$

le tableur $\rightarrow$ en B3 : $= 0.9 * B2 + 0.05 * C2$

en C3 : $= 0.1 * B2 + 0.95 * C2$

A) 3) D'après les données du tableur, le nombre de ruraux semble tendre vers 40 millions et le nombre de citadins semble tendre vers 80 millions.

B) 1) Si $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ et $v_n = 120 - u_n$, d'où

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,9u_n + 6 - 0,05u_n = 0,85u_n + 6$$

B) 2) a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n \geq 40$.

• On a $u_0 = 90 \geq 40$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \geq 40$, d'où $0,85u_n \geq 0,85 \times 40$ (car $0,85 > 0$), soit $0,85u_n \geq 34$, donc $0,85u_n + 6 \geq 34 + 6$, soit $u_{n+1} \geq 40$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Ainsi, la proposition $\mathcal{B}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n .

B)2)b) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,85u_n + 6 - u_n = 6 - 0,15u_n$.

Comme $u_n \geq 40$ (voir question précédente), on a $-0,15u_n \leq -0,15 \times 40$ (car $-0,15 < 0$), soit $-0,15u_n \leq -6$, d'où $6 - 0,15u_n \leq 0$, soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$. On donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, ce qui prouve la décroissance de la suite (u_n) .

B)3)a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34$, d'où $w_{n+1} = 0,85 \left(u_n - \frac{34}{0,85} \right) = 0,85(u_n - 40)$, soit $w_{n+1} = 0,85w_n$, ce qui prouve bien que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

B)3)b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_0 \times 0,85^n$. Or $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$, donc $w_n = 50 \times 0,85^n$. Comme $w_n = u_n - 40$, on a $u_n = w_n + 40 = 40 + 50 \times 0,85^n$.

B)4) Comme $0,85 \in]-1; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$ donc par somme et produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 40 + 50 \times 0 = 40$. D'autre part $v_n = 120 - u_n$ donc par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 120 + (-1) \times 40 = 80$. Les conjectures sont donc validées.

B)5)a) L'algorithme affiche la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n < 120 - u_n$, c'est-à-dire tel que $u_n < v_n$ (correspond à l'année où la population rurale deviendra strictement inférieure à la population en ville).

B)5)b) D'après les données fournies par le tableur, la valeur affichée est $n=6$.

III) 2) On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 0.

3)a) Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (donc en particulier $u_n \neq 0$); on a

$$u_{n+1} = \frac{0,8u_n}{u_{n+1}}, \text{ donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0,8}{u_{n+1}}. \text{ Comme } u_n > 0, \text{ on a } u_{n+1} > 1, \text{ d'où}$$

par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{u_{n+1}} < \frac{1}{1}$, soit $\frac{1}{u_{n+1}} < 1$, (□)

d'où $0,8 \times \frac{1}{u_{n+1}} < 0,8 \times 1$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 0,8$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (car $0,8 < 1$).

Comme (u_n) est à termes strictement positifs, cela prouve bien sa stricte décroissance.

3)b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n \leq 3 \times 0,8^n$.

• On a $u_0 = 3 = 3 \times 0,8^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \leq 3 \times 0,8^n$.

On a aussi $\frac{1}{u_{n+1}} < 1$ (voir (□)), d'où en multipliant membre à membre

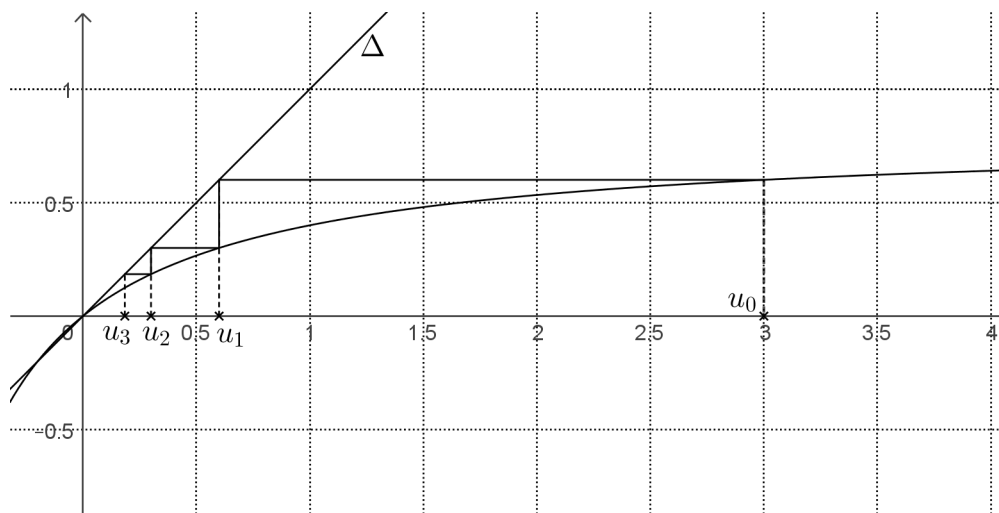
les deux inégalités précédentes (ce qui est licite car tous les membres sont strictement positifs) : $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 3 \times 0,8^n$, d'où $\frac{0,8u_n}{u_{n+1}} \leq 3 \times 0,8^n \times 0,8$, (car $0,8 > 0$)

soit $u_{n+1} \leq 3 \times 0,8^{n+1}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• La proposition $\mathcal{P}$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3)c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $0 \leq u_n \leq 3 \times 0,8^n$. Comme $0,8 \in]-1; 1[$, on a par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 \times 0,8^n) = 3 \times 0 = 0$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, en utilisant le théorème des « gendarmes ».

Constructions (question III.1.)



Correction du bonus

A) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$ et $v_n \leq 1$ donc $u_n \times v_n \leq u_n \times 1$ d'où $u_n \times v_n \leq u_n \leq 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, la suite u converge vers 1. Même chose pour la suite v en échangeant les rôles joués par u et v .

B) Remarque préliminaire : Notons E_n l'ensemble $\{0; 1; \dots; n\}$. Une partie de E_n contenant au moins la moitié des éléments de E_n contient au moins un élément supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. En effet, sinon elle ne contiendrait que des éléments strictement inférieurs à $\frac{n-1}{2}$, qui sont strictement minoritaires dans E_n .

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$$\text{pour tout entier } k \in [0; n], u_k \leq \frac{2}{k+2}.$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie vu que $u_0 = 1 = \frac{2}{0+2}$.

- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

On sait qu'au moins la moitié des termes $u_0, u_1, \dots, u_n$ sont supérieurs ou égaux à $2u_{n+1}$. D'après la remarque préliminaire, il existe donc un entier k tel que $\frac{n-1}{2} \leq k \leq n$ vérifiant $2u_{n+1} \leq u_k$. Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leq \frac{2}{k+2}$. D'où $u_{n+1} \leq \frac{2}{2k+4}$. Or $k \geq \frac{n-1}{2}$ donc $2k+4 \geq n+3$ donc $u_{n+1} \leq \frac{2}{n+3}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Bilan : Cela prouve par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+2}$. Le théorème des gendarmes entraîne alors que (u_n) converge vers 0.