

PARTIE A :

1) 36 est un carré parfait, c'est le carré de 6, donc c'est un nombre carré.

$$36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{k=1}^8 k = \frac{9 \times 8}{2} \text{ donc 36 est également un nombre triangulaire.}$$

2) a) Soit N un entier naturel non nul.

N est un carré parfait si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que $N = p^2$

N est triangulaire si et seulement s'il existe un entier naturel m tel que $N = \sum_{k=1}^m k$, soit $N = \frac{m(m+1)}{2}$

Donc N est simultanément carré et triangulaire si, et seulement si, il existe un couple $(m; p)$ d'entiers

naturels non nuls tels que $p^2 = \frac{m(m+1)}{2}$, soit aussi tels que $m^2 + m - 2p^2 = 0$

$$\text{b) } m^2 + m - 2p^2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 8p^2 = 0 \quad (1).$$

La forme canonique de $4m^2 + 4m$ est $4\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$, ou, si nous préférons éviter les fractions, nous pouvons utiliser une forme quasi canonique, $(2m+1)^2 - 1$.

En l'utilisant dans le membre de droite de (1), on obtient : $m^2 + m - 2p^2 = 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 8p^2 = 1$

Donc : le nombre triangulaire $\sum_{k=1}^m k$ est un carré si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que

$$(2m+1)^2 - 8p^2 = 1.$$

Notons que 0 est à la fois carré et triangulaire, il est le carré de zéro et il est égal à $\sum_{k=1}^0 k$ (somme vide)

PARTIE B :

1) On remarque que les couples $(1; 0)$ et $(3; 1)$ sont solutions de (E) : $x^2 - 8y^2 = 1$

2) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E) . Soit d un entier naturel, diviseur commun à x et y (par exemple, pour ceux qui l'ont vu ou revu, leur PGCD).

d divise x et d divise y , donc d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de x et de y .

En particulier, d divise $x(x) + (-8y)y$, c'est-à-dire que d divise $x^2 - 8y^2$.

$(x; y)$ est un couple solution de (E) , donc que d divise 1, et d est un entier naturel.

Donc d est nécessairement égal à 1, et les entiers x et y sont nécessairement premiers entre eux.

PARTIE C :

Nous pourrions aisément prouver par récurrence que les suites x et y sont des suites d'entiers naturels :

Pour tout entier naturel n , on note E_n la propriété « x_n et y_n sont des entiers naturels ».

Pour $n = 0$: $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$ donc la propriété E_0 est bien vérifiée.

Passage de n à $n + 1$. HR : supposons E_n vraie pour un entier naturel n donné, montrons qu'elle est alors vraie également au rang $n + 1$.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases} \text{ et l'ensemble des entiers naturels est stable par somme et produit, donc } x_{n+1} \text{ et } y_{n+1}$$

sont aussi des entiers naturels, et E_{n+1} est vraie.

Donc x_n et y_n sont des entiers naturels pour tout entier naturel n .

$$1) \text{ On trouve : } \begin{cases} x_1 = 3x_0 + 8y_0 = 17 \\ y_1 = x_0 + 3y_0 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3x_1 + 8y_1 = 99 \\ y_2 = x_1 + 3y_1 = 35 \end{cases}$$

2) a) Pour tout entier naturel n , on note P_n la propriété « $x_n \geq 4^n$ et $y_n \geq 4^n$ »

Pour $n = 0$: $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et $4^0 = 1$ donc la propriété P_0 est bien vérifiée.

Passage de n à $n + 1$. HR : supposons P_n vraie pour un entier naturel n donné, montrons qu'elle est alors vraie également au rang $n + 1$.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases} \text{ donc d'après l'hypothèse de récurrence, } \begin{cases} x_{n+1} \geq 3 \times 4^n + 8 \times 4^n \\ y_{n+1} \geq 4^n + 3 \times 4^n \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x_{n+1} \geq 11 \times 4^n \\ y_{n+1} \geq 4 \times 4^n \end{cases}.$$

$$\text{A fortiori, } \begin{cases} x_{n+1} \geq 4^{n+1} \\ y_{n+1} \geq 4^{n+1} \end{cases} \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vérifiée également.}$$

Donc $x_n \geq 4^n$ et $y_n \geq 4^n$ pour tout entier naturel n .

b) Pour tout entier naturel n , on note S_n la propriété « $(x_n ; y_n)$ est solution de (E) »

Pour $n = 0$: $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, et $(3; 1)$ est bien solution de (E) donc la propriété S_0 est bien vérifiée.

Passage de n à $n + 1$. HR : supposons S_n vraie pour un entier naturel n donné, montrons qu'elle est alors vraie également au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 &= (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 = (9x_n^2 + 48x_ny_n + 64y_n^2) - 8(x_n^2 + 6x_ny_n + 9y_n^2) \\ &= x_n^2 - 8y_n^2 = 1 \end{aligned} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

donc S_{n+1} est vérifiée également.

Donc $(x_n ; y_n)$ est solution de (E) pour tout entier naturel n .

c) Pour tout entier naturel n , on note D_n la propriété « x_n ou y_n est multiple de 3 » avec un OU inclusif de problème de mathématiques. Mais peut être aurons nous la chance de vérifier si ce OU peut être en fait un OU exclusif comme à la cantine dans « gâteau OU fruit (mais pas les deux) »

Toute la preuve qui suit utilise implicitement le fait que x_n et y_n sont des entiers.

Pour $n = 0$: $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, donc x_0 est multiple de 3, $y_0 = 1$ donc y_0 ne l'est pas, et la propriété D_0 est bien vérifiée, et même avec un OU exclusif.

Passage de n à $n + 1$. HR : supposons D_n vraie pour un entier naturel n donné, montrons qu'elle est alors vraie également au rang $n + 1$.

■ Si x_n est multiple de 3 et y_n ne l'est pas, alors $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ est multiple de 3 en tant que somme de deux multiples de 3, mais $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ n'est pas multiple de 3, puisqu'il est la somme d'un multiple de 3, $3x_n$, et d'un nombre non multiple de 3, $8y_n$.

■ Si y_n est multiple de 3 et x_n ne l'est pas, alors $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ est multiple de 3 en tant que somme de deux multiples de 3, mais $y_{n+1} = x_n + 3y_n$ n'est pas multiple de 3, puisqu'il est la somme d'un multiple de 3, $3y_n$, et d'un nombre non multiple de 3, x_n . Donc D_{n+1} est vraie aussi.

Bilan : nous avons prouvé que

■ pour tout entier naturel n pair, x_n est multiple de 3 et y_n ne l'est pas

■ pour tout entier naturel n impair, y_n est multiple de 3 et x_n ne l'est pas

3) En regardant les relations de récurrence, en gardant à l'esprit que x_n et y_n sont des entiers naturels, il est évident que $x_n \geq y_n$ pour tout entier naturel n . Ce qui simplifiera notre condition d'arrêt.

TRES IMPORTANT EN PRATIQUE MAIS RAREMENT MENTIONNÉ AU LYCÉE :

Notons aussi que les suites x et y sont toutes les deux strictement croissantes, ce qui nous garantit que notre algorithme peut aboutir et que l'écrire n'est pas un exercice vain.

Variables : n, X, Y, Z et A sont des nombres

Initialisation : $n \leftarrow 0$ $X \leftarrow 3$ $Y \leftarrow 1$

Entrées : Lire A

Traitement : Tant que $Y < A$ faire

$Z \leftarrow 3X + 8Y$

$Y \leftarrow X + 3Y$

$X \leftarrow Z$

$n \leftarrow n + 1$

Fin Tant que

Sorties : Afficher n

PARTIE C :

Nous avons vu à la partie A que le nombre triangulaire $\frac{m(m+1)}{2}$ est égal au carré de p si et seulement si $(2m+1)^2 - 8p^2 = 1$, donc si et seulement si le couple $(2m+1; p)$ est solution de l'équation (E) de la partie B.

En utilisant l'algorithme de la partie C ou un tableur, on trouve que le premier entier multimorphe supérieur ou égal à un milliard, en gras dans le tableau ci-dessous, est 1 631 432 881 :

n	x_n	y_n	y_n^2
0	3	1	1
1	17	6	36
2	99	35	1225
3	577	204	41616
4	3 363	1 189	1413721
5	19 601	6 930	48024900
6	114 243	40 391	1631432881
7	665 857	235 416	5.5421E+10
8	3 880 899	1 372 105	1.8827E+12
9	22 619 537	7 997 214	6.3955E+13
10	131 836 323	46 611 179	2.1726E+15
11	768 398 401	271 669 860	7.3805E+16
12	4 478 554 083	1 583 407 981	2.5072E+18
13	26 102 926 097	9 228 778 026	8.517E+19
14	152 139 002 499	53 789 260 175	2.8933E+21
15	886 731 088 897	313 506 783 024	9.8287E+22
16	5 168 247 530 883	1 827 251 437 969	3.3388E+24
17	30 122 754 096 401	10 650 001 844 790	1.1342E+26
18	175 568 277 047 523	62 072 759 630 771	3.853E+27
19	1 023 286 908 188 740	361 786 555 939 836	1.3089E+29
20	5 964 153 172 084 900	2 108 646 576 008 240	4.4464E+30
21	34 761 632 124 320 700	12 290 092 900 109 600	1.5105E+32
22	202 605 639 573 839 000	71 631 910 824 649 600	5.1311E+33

Notons enfin que nous avons une usine à infinité de nombres à la fois triangulaires et carrés mais n'avons pas prouvé que nous les générerons tous, et n'avons pas non plus prouvé par un exemple autre que ceux du tableau qu'il en existe d'autres hormis zéro.

Vérifier si nous avons trouvé tous les couples d'entiers naturels solutions de (E) , c'est-à-dire tous les carrés triangulaires, fera peut être l'objet d'un problème ultérieur.