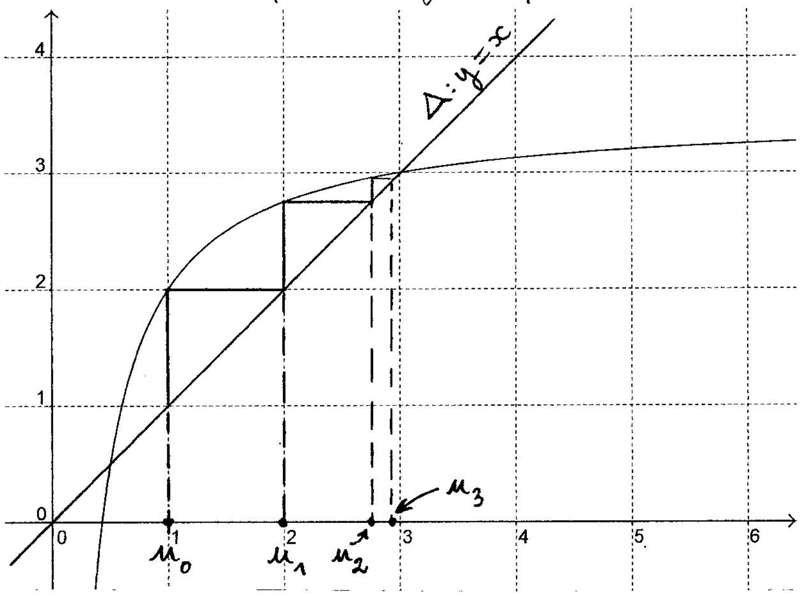
TS5 - Correction de l'exercice d'A.P. (séance du samedi 13/10/18)

I) 1) a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Il suffit donc de tracer la droite Δ d'équation $y=x$ pour réaliser la construction demandée :



1) b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers 3.

2) a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $1 \leq u_n \leq 3$

• Initialisation : on a $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a donc $1 \leq u_n \leq 3$.

MÉTHODE N°1 f étant croissante sur $]0;+\infty[$, on a $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$, soit $2 \leq u_{n+1} \leq 3$, car $f(1) = 3,5 - \frac{1,5}{1} = 2$, $f(3) = 3,5 - \frac{1,5}{3} = 3,5 - 0,5 = 3$ et $f(u_n) = u_{n+1}$. Comme $1 \leq 2$, on en déduit que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

MÉTHODE N°2 par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, on a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{1}$, soit $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$,

d'où $-1,5 \times 1 \leq -1,5 \times \frac{1}{u_n} \leq -1,5 \times \frac{1}{3}$, car $-1,5 < 0$,

soit $-1,5 \leq -\frac{1,5}{u_n} \leq -0,5$, d'où :

$3,5 - 1,5 \leq 3,5 - \frac{1,5}{u_n} \leq 3,5 - 0,5$, soit $2 \leq u_{n+1} \leq 3$,

ce qui prouve que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$ (car $2 \geq 1$) et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

> ⚠ Remarquez l'efficacité de la méthode n°1, d'autant que la méthode n°2 n'est pas toujours possible...

• Conclusion : la proposition $\mathcal{P}$ est vraie au rang 0, et héréditaire, par conséquent, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_{n+1} \geq u_n$.

• Initialisation : on a $u_1 = 3,5 - \frac{1,5}{u_0} = 3,5 - \frac{1,5}{1} = 2$, donc $u_1 \geq u_0$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie

• Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$;

on a $\underbrace{1 \leqslant u_n}_{\text{d'après 2.a.}} \leqslant u_{n+1}$, donc par croissance de f sur $]0;+\infty[$,

$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$,

ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Bilan : la proposition est héréditaire et vraie au rang 0, donc elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$; ainsi on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

3)a) Soit $n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \left(3{,}5 - \dfrac{1{,}5}{u_n}\right) = -0{,}5 + \dfrac{1{,}5}{u_n} = \dfrac{-0{,}5u_n + 1{,}5}{u_n}$,

d'où $w_{n+1} = \dfrac{0{,}5(3-u_n)}{u_n} = 0{,}5\dfrac{w_n}{u_n}$.

3)b) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \geqslant 1$ donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{1}$, soit $\dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$ (*). D'autre part $u_n \leqslant 3$ donc $3 - u_n \geqslant 0$, soit $w_n \geqslant 0$. On déduit donc de (*) que $w_n \times \dfrac{1}{u_n} \leqslant w_n \times 1$, soit $\dfrac{w_n}{u_n} \leqslant w_n$, d'où $0{,}5\dfrac{w_n}{u_n} \leqslant 0{,}5\, w_n$ (car $0{,}5 > 0$), soit $w_{n+1} \leqslant 0{,}5\, w_n$.

3)c) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $w_n \leqslant 2 \times 0{,}5^n$.

• Initialisation : on a $w_0 = 3 - u_0 = 3 - 1 = 2 = 2 \times 0{,}5^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a donc $w_n \leqslant 2 \times 0{,}5^n$, d'où $0{,}5\, w_n \leqslant 2 \times 0{,}5^n \times 0{,}5$ (car $0{,}5 > 0$), soit $0{,}5\, w_n \leqslant 2 \times 0{,}5^{n+1}$ et comme $w_{n+1} \leqslant 0{,}5\, w_n$ (voir question 3.b.), on en déduit que $w_{n+1} \leqslant 2 \times 0{,}5^{n+1}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : la proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire et vraie au rang 0, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3)d) D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant w_n \leqslant 2 \times 0{,}5^n$; or $0{,}5 \in]-1;1[$, donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 \times 0{,}5^n) = 2 \times 0 = 0$.

Le théorème des gendarmes entraîne alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Comme $w_n = 3 - u_n$, on a $u_n = 3 - w_n$, ce qui prouve par somme que (u_n) converge vers $3 - 0 = 3$.