

73) 1) a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition: $u_n \geq 4$

- On a $u_0 = 5 \geq 4$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \geq 4$, d'où $u_n + 12 \geq 4 + 12 = 16$, d'où $\sqrt{u_n + 12} \geq \sqrt{16}$ par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, soit $u_{n+1} \geq 4$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$.

1) b) • Solution n°: 1 On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 12} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n + 12} - u_n)(\sqrt{u_n + 12} + u_n)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$,

$$\text{soit } u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{u_n + 12}^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 12} + u_n} = \frac{u_n + 12 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 12} + u_n} = \frac{(4 - u_n)(3 + u_n)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{u_n + 12} + u_n > 0$, $3 + u_n \geq 7 > 0$ et $4 - u_n \leq 0$ (voir 1.a.), donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

• Solution n°: 2 (en utilisant un raisonnement par récurrence)

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition: $u_{n+1} \leq u_n$.

- On a $u_1 = \sqrt{u_0 + 12} = \sqrt{17} \leq \sqrt{25}$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, soit $u_1 \leq 5 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_{n+1} \leq u_n$, d'où $0 \leq 4 + 12 \leq u_{n+1} + 12 \leq u_n + 12$, donc $\sqrt{u_{n+1} + 12} \leq \sqrt{u_n + 12}$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, soit $u_{n+2} \leq u_{n+1}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante.

1) c) Dans un prochain chapitre, nous verrons qu'une suite décroissante et minorée (ici par 4) est forcément convergente.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $u_{n+1} - 4 = \sqrt{u_n + 12} - 4 = \frac{(\sqrt{u_n + 12} - 4)(\sqrt{u_n + 12} + 4)}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$, soit

$$u_{n+1} - 4 = \frac{\sqrt{u_n + 12}^2 - 16}{\sqrt{u_n + 12} + 4} = \frac{u_n + 12 - 16}{\sqrt{u_n + 12} + 4} = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}.$$

Or $u_n \geq 4$ donc $u_n + 12 \geq 16$, d'où $\sqrt{u_n + 12} \geq \sqrt{16}$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, d'où $\sqrt{u_n + 12} + 4 \geq 4 + 4 = 8$ et par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \leq \frac{1}{8}, \text{ d'où l'on tire: } \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \leq \frac{1}{8} (u_n - 4) \text{ car } u_n - 4 \geq 0 \text{ (voir 1.a.)},$$

$$\text{soit } u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8} (u_n - 4).$$

2) b) D'après 1.a., on a déjà pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - 4$.

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n - 4 \leq \frac{1}{8^n}$.

- On a $u_0 - 4 = 5 - 4 = 1 = \frac{1}{8^0}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n - 4 \leq \frac{1}{8^n}$ donc

$\frac{1}{8}(u_n - 4) \leq \frac{1}{8} \times \frac{1}{8^n}$ (car $\frac{1}{8} > 0$), soit $\frac{1}{8}(u_n - 4) \leq \frac{1}{8^{n+1}}$. Or d'après la question précédente, on a $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$, donc $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8^{n+1}}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Cela prouve par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que $0 \leq u_n - 4 \leq \frac{1}{8^n}$.

2) c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - 4 \leq \frac{1}{8^n}$, d'où en ajoutant 4

à chaque membre : $4 \leq u_n \leq 4 + \frac{1}{8^n}$.

Or comme $8 \in]1; +\infty[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n = +\infty$, d'où par quotient et somme :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{8^n}\right) = 4 + 0 = 4$. D'après le théorème « des gendarmes », on en déduit

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

(87) 1) a) Si $x < 3$, on a $-x > -3$, d'où $6-x > 3$ donc $\frac{1}{6-x} < \frac{1}{3}$ par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et finalement $\frac{9}{6-x} < \frac{9}{3} = 3$ car $9 > 0$

• Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition: $u_n < 3$

- On a $u_0 = -3 < 3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$: on a $u_n < 3$, ce qui montre, d'après le point précédent, que $\frac{9}{6-u_n} < 3$, soit $u_{n+1} < 3$: la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.

$$1) b) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n = \frac{9 - u_n(6-u_n)}{6-u_n} = \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{6-u_n},$$

$$\text{d'où } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6-u_n}. \text{ Or } u_n < 3 \text{ donc } 6-u_n > 0; \text{ comme } (u_n - 3)^2 \geq 0,$$

on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc que la suite (u_n) est croissante.

1) c) Dans un prochain chapitre, nous verrons qu'une suite croissante et majorée (ici par 3) est forcément convergente.

$$2) a) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ on a } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3} - \frac{1}{u_n-3}, \text{ d'où}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3u_n-9} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{3-u_n}{3u_n-9} = -\frac{u_n-3}{3(u_n-3)} = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}$: (v_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

$$2) b). \text{ On a } v_0 = \frac{1}{u_0-3} = \frac{1}{-3-3} = -\frac{1}{6} \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times n = -\frac{n}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\bullet \text{ Comme } v_n = \frac{1}{u_n-3}, \text{ on a } u_n-3 = \frac{1}{v_n}, \text{ d'où } u_n = 3 + \frac{1}{v_n} = 3 + \frac{1}{-\frac{n}{3} - \frac{1}{6}},$$

$$\text{soit } u_n = 3 - \frac{6}{2n+1}.$$

2) c) Par somme et quotient, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 - 0 = 3$.